Die Geometrie der Wirklichkeit

Band 3

Die Geometrie der Wirklichkeit

Band 3

Von den Primzahlen
zu einer potentiellen Raumstruktur

Feinstruktur, Mischung
und die Slot-Zerlegung der Konstanten

Thomas Krause

2026

© 2026 Thomas Krause. Alle Rechte vorbehalten.

Herstellung und Verlag: Selbstverlag, Kindle Direct Publishing.

Satz mit LaTeX im Format 6×9 Zoll.

Erste Auflage 2026.

Hinweis. Dieses Buch ist der dritte Teil einer mehrbändigen Reihe. Band 1 (**Vom ersten Tick zu den Elementarteilchen**, 2026) liefert das geometrische Fundament aus A_5-Buchhaltung und Iterationskaskade. Band 2 (**Die Primzahlenmaschine — Vom Streichholzspiel zur Halblinie**, 2026) baut aus vier einfachen Streichholzregeln R1 bis R4 das Zahlenpolytop, die acht Restklassen modulo 30, den 16-Zeller mit seinem Davidstern-Schatten, die vier Säulen 1, 7, 11, 13 und die primoriale Kaskade, die die nichttrivialen Nullstellen von ζ auf der Halblinie $\sigma = 1/2$ zusammenlaufen lässt. Der vorliegende Band führt die beiden Stränge zusammen — das Zahlenpolytop aus Band 2 und die A_5-Symmetrie aus Band 1 treffen sich über die Kette $\mathbb{Z}/4 \hookrightarrow 2I \twoheadrightarrow A_5$ zum Ikosaeder —, entwickelt die Slot-Zerlegung für Feinstruktur und Mischung und prüft, ob dahinter eine platonische Raumstruktur liegt. Die Frage nach einem festen Symmetrie-Anker bleibt bewusst offen und ist Gegenstand von Band 4.

Für jene Leserin und jenen Leser,
die Bände 1 und 2 beendet haben
und die Ahnung mitgenommen haben,
dass Arithmetik und Physik
denselben Grundriss teilen.

Dieser Band prüft die Ahnung.

Inhaltsverzeichnis

Prolog **xiv**

1 Der methodische Rahmen **1**

1.1 Die zwei Postulate 2

1.2 Die drei Schichten $L_1 \subseteq L_2 \subseteq L_3$ 2

1.3 Das Vier-Säulen-Theorem 3

1.4 Die Slot-Architektur $12 = 1 + 3 + 3' + 5$ 5

1.5 Was das Modell für die light quarks vorhersagt 9

1.6 Die kumulative Inklusionskette 12

1.7 Die drei Audit-Filter 13

2 Die Reichweite der Maschine **15**

2.1 Die drei Schichten 16

2.2 Warum die Schichten so zerfallen 17

2.3 Konsequenzen 19

2.4 Das Falsifikationskriterium, das daraus folgt 19

2.5 Die geometrische Drei-Teilung an der Halbierungsachse . 20
2.6 Schlussbemerkung: Selbstauferlegte Grenze dieses Buches 23

3 Interaktion mit Konsequenz 25
3.1 Interaktion als Elementarvorgang 26
3.2 Ebenen der Interaktion 26
3.3 Konsequenzen 28
3.4 Falsifikationskriterium 29
3.5 Zusammenspiel der beiden Metatheoreme 30

4 Der Übergang: Vom 16-Zeller zum Ikosaeder 32
4.1 Wo Band 2 endet 32
4.2 Warum der 16-Zeller nicht genügt 34
4.3 Der Übergang 35
4.4 Die algebraische Brücke 36
4.5 Anker in Band 1 37

5 Der Symmetrie-Anker: Die starke Kopplung 39
5.1 Wozu ein Anker 39
5.2 Beobachtung Z1: Die A_5-Bahnminima 40
5.3 Beobachtung Z2: Die starke Kopplung 43
5.4 Beobachtung Z2b: Die 30 als $5 \cdot 3 \cdot 2$ 44
5.5 Die 30 als Y_6-Sattelanzahl 45

6 Die Feinstrukturkonstante als A_5-Signatur 48
6.1 Was dieses Kapitel tut 48
6.2 Die Ikosaeder-Signatur 49
6.3 Nicht-Zufälligkeit der Konfiguration 50
6.4 Wilson-Kaskade als Konsistenz-Kontrolle 51

6.5 Was dieses Kapitel leistet 55
6.6 Was uns die Signatur nicht sagt 55

7 Mischwinkel und Generationen 57
7.1 Der schwache Mischungswinkel als Slot-Verhältnis . . . 58
7.2 Die Plancherel-Auswahl $\{1, 4, 5\}$ 59
7.3 Drei Neutrinos aus vier Galois-Bahnen 61
7.4 Die drei CKM-Winkel als Potenzen des goldenen Schnitts 62
7.5 Additivität der Wurzeltiefen: die Cabibbo-Identität . . . 63
7.6 T-Konten und der β-Zerfall 64
7.7 Fazit: eine gemeinsame Sprache für Mischungen 65

8 Die Slot-Zerlegung 66
8.1 Drei klassische Bausteine 67
8.2 Der Beweis der Slot-Zerlegung 68
8.3 Der versteckte Vier-Slot 71
8.4 Woher die 600 kommt 72
8.5 Was auf der Slot-Zerlegung aufbaut 73

9 α_s aus der Slot-Zerlegung 75
9.1 Der 3-Slot als eindeutiger Träger 76
9.2 Die Bahntiefe φ^{-3} slot-nativ 77
9.3 Der Faktor 1/2 als Symmetrisierungs-Projektor 80
9.4 Bilanz und Übergang 82

10 Die Feinstruktur aus drei Slots 84
10.1 Der geometrische Ort: die Vertex-Wirkung 85
10.2 Der McKay-Kalender der Bahntiefen 86
10.3 Term Slot 5: $+360\varphi^{-2}$ 87

10.4 Term Slot 3: $-2\varphi^{-3}$ 88
10.5 Term Slot 1: $+(3\varphi)^{-5}$ 90
10.6 Der fehlende Slot: $\mathbf{3}'$ als Ghost-Slot 91
10.7 Das Hauptresultat 92
10.8 Konsistenz und Zwischenbilanz 93

11 Generationen und Mischung: der Anfang 95
11.1 Der Vertex-Modul-Fund und der fehlende Vier-Slot . . . 96
11.2 Der Kanten-Modul und die Cabibbo-Amplitude 98
11.3 Der schwache Mischungswinkel als Slot-Verhältnis . . . 100
11.4 Die Neutrino-Generationen 101
11.5 Offene Punkte: $|V_{cb}|$, $|V_{ub}|$, PMNS und CP-Phase 102
11.6 Zwischenstand 103

12 Die vollständige CKM-Matrix 105
12.1 Die drei CKM-Beträge im Experiment 106
12.2 Die Amplituden-Hierarchie folgt aus der Slot-Ordnung . 106
12.3 Die slot-native Bruchexponenten-Form 107
12.4 Der Numerator-Widerstand 110
12.5 Die CP-Phase als slot-nativer Beobachtungsbefund . . . 112
12.6 Zusammenfassung: Was slot-nativ steht, was offen bleibt 113

13 Die PMNS-Matrix und die inverse Tiefen-Permutation 116
13.1 Die drei PMNS-Beträge im Experiment 117
13.2 Die Bruchexponenten-Form mit invertierter Tiefen-Zuordnung 117
13.3 Die universelle Tiefen-Menge aus Konjugationsklassen . 119
13.4 Die 3-Cycle-Permutation ist algebraisch eindeutig 120

13.5 Confinement gegen freie Propagation 121
13.6 Vollständigkeits-Diagramm für den Mischwinkel-Sektor . 123
13.7 Klassifikation der offenen Punkte 123
13.8 Zwischenstand 125

14 Lepton-Massenverhältnisse aus der Charaktertafel 127
14.1 Der Ausgangspunkt: die Latenz-Repräsentation 128
14.2 Der erste Sperreigenwert K_1 129
14.3 Der zweite Sperreigenwert K_2 aus Galois-Konjugation . 130
14.4 Der dritte Sperreigenwert K_3 als Produkt 131
14.5 Massenverhältnisse 131
14.6 Numerische Prüfung gegen PDG 132
14.7 Die Koide-Relation als automatische Konsequenz 133
14.7.1 Zwei Argumente gegen eine vierte Generation . . 134
14.7.2 Koide als zweiter Zugang zu m_μ/m_e 136
14.8 Ampel-Einordnung 138
14.9 Was offen bleibt 138
14.10Zusammenfassung 139

Zwischenbilanz: Zwei Blöcke, zwei Fragen 140

15 Der Anker-Versuch: eine ehrliche Grenzziehung 143
15.1 Die B17-Schutzregel 144
15.2 Sondierung 1: der elektroschwache Anker v_{EW} 145
15.3 Sondierung 2: die starke Skala Λ_{QCD} 146
15.4 Sondierung 3: die Higgs-Selbstkopplung λ_H 147
15.5 Sondierung 4: der Top-Yukawa y_{top} 148
15.6 Externe Anker-Analyse: Pfad (h) 148

15.7 Bilanz des Anker-Versuchs 151
15.8 Was Band 3 leistet und was nicht 151

16 Der Bindungspfad: Signatur, Sieb und Bragg-Peaks 154

16.1 Kehrtwende: statt Anker suchen, Bindung sehen 154
16.2 Drei Beziehungs-Ebenen zwischen Primzahlen 155
16.3 Die Signatur $\sigma(d)$: der Kern der HL-Konstanten 156
16.4 Das Sieb-Theorem: Verhältnis $(r-1)/(r-2)$ 157
16.5 Drei Prinzipien der Bindung 158
16.6 Bragg-Peaks: die Mitte $m = (p+q)/2$ modulo b 159
16.7 A4 Analytische Verankerung: der Exponent $\alpha = -2C_2$. 159
16.8 A5 Vorfaktor-Zerlegung: $\mathrm{coh}(r) = \kappa \cdot E(r) \cdot r^{-2C_2}$ 161
16.9 Fair-Kontrast und die Delle bei 19, 23 162
16.10 Der κ-Skalen-Test: Konstanz über Regionen 163
16.11 Das Faircheck-Prinzip als Meta-Regel 164
16.12 Was der Bindungspfad geleistet hat 165
16.13 Offene To-Dos für Band 4 165

17 Die multiplikative Klassifikation der Kohärenz 167

17.1 Vom offenen Rand des Bindungspfades zur geschlossenen Form 167
17.2 Setup: Fenster, Restklassen, lokaler Π-Faktor 168
17.2.1 Der gerade-Π-Kern 168
17.2.2 Region, Fenster, Mittelwert 169
17.2.3 Der lokale Π-Faktor X_p 169
17.2.4 Die Kohärenzgrösse 169
17.3 Lemma 1: Restklassen-Faktorisierung 170
17.4 Lemma 2: CRT-Faktorisierung der S-Summe 171

17.5 Lemma 3: Auswertung der lokalen Summen 172
17.6 Hauptsatz: die multiplikative Klassifikation 173
17.7 Numerische Verifikation 174
17.8 Konsequenzen 175
17.8.1 Der Vorfaktor κ ist kein freier Parameter 175
17.8.2 Die Delle bei $r \in \{19, 23\}$ ist ein reiner Regionseffekt 176
17.8.3 Der Bindungspfad ist multiplikativ, nicht additiv 176
17.8.4 Anschluss an die Ramanujan-Summen 176
17.8.5 Sicherheit gegen B17 177
17.9 Bilanz und Übergang 177

18 Die Faktorisierung von K_r — Amplitude auf lokalen Bausteinen 178

18.1 Aufbau und Notation 179
18.2 Lemma A — Multiplikativität der Potenz r^α 179
18.3 Lemma B — Multiplikativität von $1/\varphi(r)$ auf quadratfreien Zahlen 180
18.4 Hauptsatz — Faktorisierung von K_r 180
18.5 Kombinierte Formel: $\mathrm{coh}(r) \cdot K_r$ 182
18.6 Asymptotik der lokalen Faktoren 183
18.7 Numerische Verifikation an acht Achsen 183
18.8 Vergleich von coh-Faktorisierung und K_r-Faktorisierung 184
18.9 Konsequenzen 185
18.10 Bilanz und Übergang 186

19 Die Ramanujan-Selberg-Brücke — $F(p)$ und κ_p als Zwillinge 187

19.1 Motivation: die zwei Puzzleteile suchen ihren Rahmen . 188

19.2 Die zwei Familien: $G_p(s;\nu)$ und $H_p(s)$ 189
19.3 Lemma A — Geschlossene Form von G_p 189
19.4 Lemma B — Spezialwerte von G_p 190
19.5 Lemma C — H_p an der Twin-Prime-Stelle 191
19.6 Der Hauptsatz — Λ_p als Produkt der Zwillinge 192
19.7 Numerische Verifikation 193
19.8 Anschluss an klassische Selberg-Mollifikatoren 194
19.9 Bilanz und Anschluss 196

20 Zeta-Regularisierung und Universalitätstest 198
20.1 Divergenzstruktur des Kappa-Produkts 199
20.2 Zeta-analoge Reihe und ihre Pole 200
20.3 Definition und Hauptsatz 201
20.4 Numerische Auswertung 202
20.5 Selberg-Mollifier und die Zahl $M_\kappa(1)$ 203
20.6 Das Drei-Konstanten-Profil 204
20.6.1 Negativ-Prüfung gegen bekannte Naturkonstanten 205
20.7 Karamata-Äquivalenz und Kanonizität von A 206
20.8 Einparameter-Familie und Fixpunktstruktur 207
20.9 Universalitätstest: Konstellationen und modifizierte Reihen 208
20.9.1 Baseline: Konstellationen $2k = 2, 4, 6$ 208
20.9.2 Variante A: Ausschluss von Primteilern von $2k$. 209
20.9.3 Variante B: Reweighting mit Konstellationsfaktor 209
20.9.4 Modifizierte $R_{2k}(s)$ mit Ausschluss der Primteiler 210
20.10 Konsolidierte Bilanz 210

21 Ampel, Falsifikation und Bilanz 213
21.1 Ampel-Tabelle Block 1: Feinstruktur und Slot-Architektur 214

21.2 Ampel-Tabelle Block 2: Slot-Zerlegung und CKM/PMNS 217
21.3 Ampel-Tabelle Block 3: Anker-Versuch und Zeta-Regularisierung 218
21.4 Master-Falsifikationsliste: Zehn operative Härte-Tests . . 219
21.5 Was die Theorie kann und was sie nicht kann 221
21.6 Programm für Band 4 223
21.7 Bilanz 223

22 Zusammenfassung, Fazit und Ausblick 226
22.1 Was in diesem Band geleistet wurde 226
22.2 Ausblick auf Band 4 228
22.3 Schluss 229

23 Die Geometrie der Wirklichkeit — eine Raumstruktur-Lesart 231
23.1 Der methodische Rahmen: Geometrie vor Algebra . . . 232
23.2 Baustein 1: Ikosaeder und die Gruppe A_5 232
23.3 Baustein 2: Stella Octangula und der 16-Zeller 233
23.4 Baustein 3: Hyperoktaeder-Projektionen 234
23.5 Wie sich die Sektoren einordnen 235
23.6 Was noch offen ist 235

Literaturverzeichnis 237
A. Eigene Bände der Buchreihe 237
B. Mathematische und physikalische Grundlagenwerke 237
C. Messdatenquellen und Konsortien 239

Glossar 241

Prolog: Der Punkt, an dem zwei Stränge sich treffen

Band 1 begann mit einem Punkt, einem Takt und einer Regel und endete bei den Massen der Elementarteilchen, der Feinstrukturkonstante und einer geometrischen Lesart der kosmologischen Konstante. Band 2 begann mit vier Streichholzregeln R1 bis R4 auf der Zahlengeraden, aus denen das Bertrand-Postulat, die Adresse der acht Restklassen modulo 30, der 16-Zeller als tragendes Polytop, sein Davidstern-Schatten unter der Petrie-Projektion und schließlich die vier Säulen 1, 7, 11, 13 wuchsen. Aus den Bahnminima $|B_k| = \prod_{i=1}^{k}(p_i - 1)$ und der primorial getakteten Kaskade entwickelte Band 2 den Weg zur Halblinie $\sigma = 1/2$, auf der alle vier Säulen zusammenfallen und die nichttrivialen Nullstellen von ζ liegen. Er endete an der Stelle, an der das Zahlenpolytop bereit war, seine Symmetrie zu zeigen: dem 16-Zeller und seinem Ikosaeder-Zwilling.

Der vorliegende Band tut zwei Dinge, die auf den ersten Blick nicht zusammenzugehören scheinen. Er führt die **Primzahlenmaschine** aus Band 2 mit der A_5**-Buchhaltung** aus Band 1 zusammen. Und er zeigt, dass diese Verschmelzung nicht nur eine ästhetische Beobachtung ist, sondern die einzige Symmetrie liefert, die an das Zahlenpolytop passt.

Das Zahlenpolytop — der 16-Zeller mit seinen acht Restklassen modulo 30 — trägt auf natürliche Weise die Ikosaeder-Gruppe A_5. Aus dieser einen Beobachtung entsteht das Programm des Buches. Wir beweisen, dass die starke Kopplung $\alpha_s(M_Z)$, die Feinstrukturkonstante α^{-1} und die Cabibbo-Amplitude $|V_{us}|$ nicht drei unabhängige empirische Werte sind, sondern drei Facetten derselben A_5-Struktur, die sich auf dem Zahlenpolytop entfaltet. Renormierungsgruppe und Lagrangedichte werden in diesen Herleitungen nicht benötigt.

Ein zweites Motiv zieht sich durch das Buch. Wir zeigen, dass die Konstanten des Standardmodells nicht als monolithische Zahlen erscheinen, sondern als **Slot-Zerlegungen**. Die Zahl 12 der Iterationskaskade zerfällt in $1 + 3 + 3' + 5$. Die drei physikalischen Kopplungen α_s, α und die Mischwinkel sitzen auf genau diesen Slots. Diese Zerlegung ist keine Namensgebung. Sie ist ein Theorem über die Eigenräume der Ikosaeder-Wirkung auf den harmonischen Moden, und aus ihr folgt die Struktur der drei Kopplungen in geschlossener Form.

Der Band gliedert sich in fünf Blöcke.

Block 1 legt den methodischen Rahmen fest. Er formuliert das Metatheorem über die Reichweite der Maschine, das Metatheorem über die Interaktionsebenen und führt den Übergang vom 16-Zeller zum Ikosaeder algebraisch aus. Er endet mit den drei Beobachtungen, die den Symmetrie-Anker konstituieren: die A_5-Bahnminima $\{1, 4, 5\}$, die Formel $\alpha_s(M_Z) = \varphi^{-3}/2$ und die multiplikative Struktur der Zahl 30 als $5 \cdot 3 \cdot 2$.

Block 2 beweist das Slot-Zerlegungs-Theorem und leitet daraus α_s, α^{-1} und die Cabibbo-Amplitude in geschlossener Form her. Er zeigt, dass genau diese drei Kopplungen auf drei strukturell verschiedenen Slots sitzen und dass die Reihenfolge der Slot-Beiträge eindeutig bestimmt ist.

Block 3 und **Block 4** führen die multiplikative Klassifikation der Kohärenz und die Faktorisierung der Amplitudenkonstante K_r durch.

Beide sind rein maschinen-intern und dienen später als analytische Brücke zwischen Zahlenpolytop und Physik.

Block 5 baut die Ramanujan-Selberg-Brücke und schliesst den Kreis: die maschinen-interne Regularisierung $\prod_p^{\zeta} \kappa_p$ ist konsistent mit dem, was in Block 2 aus geometrischen Gründen verlangt wurde. Der Abschluss enthält einen ehrlichen Universalitätstest, der zeigt, wo die Identität gilt und wo sie eine Twin-spezifische Koinzidenz bleibt.

Wer also fragt, was dieses Buch zu tun versucht, hat eine kurze Antwort: die zwei Stränge — Zahlenpolytop und A_5-Buchhaltung — treffen sich in einem Punkt, und aus diesem Punkt folgt die Struktur der drei zentralen Kopplungen des Standardmodells. Wer fragt, ob das gelingt, hat eine ehrliche Antwort: die Herleitungen von α_s, α^{-1} und Cabibbo gelingen strukturell und in geschlossener Form. Die absoluten Skalen wie das Higgs-Vakuum, die QCD-Skala und die Top-Yukawa bleiben offen, und das Buch sagt das an den entsprechenden Stellen.

Die Struktur des Buches folgt einer Regel, die schon in Band 2 galt: Wo etwas gelingt, wird das gesagt. Wo etwas nicht gelingt, wird das ebenfalls gesagt. Negative Pfade werden nicht ausgeblendet, aber sie werden auch nicht als Erfolge verkauft. Sie stehen in kurzen, ehrlichen Absätzen an dem Punkt, wo sie versucht wurden, und markieren, welche Frage offen bleibt.

Der Band schliesst mit einer Ampeltabelle. Sie unterscheidet grüne Punkte (strukturell bewiesen), gelbe Punkte (numerisch tragfähig, strukturell nicht endgültig geankert) und rote Punkte (versucht und verworfen). Diese Ampel ist keine Werbung. Sie ist ein Vertrag mit der Leserin und dem Leser, was der Band leistet und was er nicht leistet.

KAPITEL 1

Der methodische Rahmen

Bevor dieser Band die drei Stränge — Zahlenpolytop, A_5-Symmetrie und die drei Kopplungen α_s, α^{-1}, $|V_{us}|$ — zusammenführt, ist es ehrlicher, die Regeln zu benennen, unter denen das geschieht. Bände 1 und 2 haben diese Regeln vollständig entwickelt. Wir rufen sie hier verkürzt in Erinnerung, damit die späteren Herleitungen nachvollziehbar darauf zurückgreifen können. Für die vollen Beweise und die Pre-Registration-Historie sei auf die Bände 1 und 2 dieser Buchreihe verwiesen.

Der Rahmen ruht auf zwei Postulaten, einer Schichtung, einem zentralen Eindeutigkeitssatz und drei Audit-Filtern. Diese fünf Bausteine sind so knapp, dass sie auf zwei Seiten passen, und so bindend, dass alle Vorhersagen des Buches an ihnen hängen.

1.1 Die zwei Postulate

Die Theorie geht von zwei Postulaten aus, die im publizierten Band 1 formal eingeführt sind.

P1 (Bilanz-Algebra). Es gibt eine algebraische Struktur $(B, \oplus, \ominus, \mathrm{Tr})$ mit den asymmetrischen Operationen $\oplus, \ominus : B \times B \to B$ und einer Spur-Operation $\mathrm{Tr} : B \to B$, welche die Bilanzregel

$$\mathrm{Tr}(a \oplus b) - \mathrm{Tr}(a \ominus b) = 0$$

erfüllt. Das Postulat verlangt, dass jede Interaktion doppelt verbucht wird: Zufluss und Abfluss gleichen sich in der Spur aus.

P2 (Endliche einfache Gruppe). Es gibt eine endliche einfache Gruppe G mit $|G| < \infty$ und ohne nichttriviale Normalteiler, die auf B operiert. Das Postulat verlangt, dass die Bilanz-Algebra unter einer irreduziblen Symmetrie steht — nicht unter einer willkürlichen, sondern unter einer, die sich nicht weiter zerschlagen lässt.

Beide Postulate sind minimal. Sie treffen keine Aussage über die Natur von G oder über die konkrete Realisierung von B; das ist das Programm der weiteren Existenzbedingungen. Band 3 nimmt sie ohne Wiederholung als gegeben an.

1.2 Die drei Schichten $L_1 \subseteq L_2 \subseteq L_3$

Die Existenzbedingungen der Theorie sind in drei Schichten gruppiert, die den logischen Abstand vom reinen Setzungsakt bis zur konkreten physikalischen Konfiguration abbilden:

- L_1 **logisch-ontologisch** (E1: Setzung);
- L_2 **mathematisch-strukturell** (E2 bis E7: universelle Werkzeuge wie e, π, Fibonacci, Base-12);
- L_3 **physikalisch-konstitutiv** (E8 bis E12: A_5-spezifische Konfiguration, in der die konkreten Konstanten sitzen).

Band 3 arbeitet ausschliesslich auf L_3. Jede Aussage dieses Bandes ist A_5-spezifisch. Die Trennlinie zwischen L_2 und L_3 ist die Garantie dafür, dass keine der hier vorgelegten Beobachtungen ein universelles Werkzeug ist, das man auch in einer anderen Symmetrie unterbringen könnte. Wer die Trennlinie ignoriert, verwechselt strukturelle Notwendigkeit mit numerischer Koinzidenz.

1.3 Das Vier-Säulen-Theorem

Das Zentrum des methodischen Rahmens ist der Eindeutigkeitssatz, der A_5 als einzige Symmetrie festlegt, die zur Zahlenpolytop-Struktur passt.

Theorem 1.1 (Vier-Säulen-Theorem)**.** *Sei G eine endliche einfache Gruppe, die*

(a) als Untergruppe von $\mathrm{SO}(3)$ *vorkommt (Klein 1884);*

(b) die kleinste nicht-abelsche einfache Ordnung trägt (Aschbacher–Smith 2004 als Abschluss des Klassifikationssatzes);

(c) die Symmetrie einer dualen 3D-Polytop-Paarung mit 12 Elementen pro Seite ist (Schläfli);

(d) und mit einer Primzahl $p \equiv 1 \pmod 4$ in Fermat-Zerlegung $p = a^2 + b^2$ mit A_5-Slot-Anbindung verknüpft ist (Fermat).

Dann ist $G \cong A_5$.

Der volle Beweis über die vier unabhängigen Säulen steht im publizierten Band 2, Kap. 4 (die vier Säulen $\{1, 7, 11, 13\}$ als Restklassen mod 30). Für den Leser, der Band 2 nicht zur Hand hat, sei die Beweisskizze hier in kompakter Form wiederholt.

Beweisskizze (vier Säulen). **(a) Klein 1884.** Die endlichen Untergruppen von $\mathrm{SO}(3)$ sind bis auf Konjugation zyklisch, dihedral oder eine

der drei Polytop-Gruppen A_4, S_4, A_5. Von den drei Polytop-Gruppen ist A_5 die einzige einfache und die einzige mit Ordnung ≥ 60; die Ikosaeder-Drehgruppe.

(b) Aschbacher–Smith 2004. Als Abschluss des Klassifikationssatzes der endlichen einfachen Gruppen ist $|A_5| = 60$ die kleinste nicht-abelsche einfache Ordnung. Jede endliche einfache Gruppe kleinerer Ordnung ist zyklisch von Primzahlordnung; alle kleineren kommen also für Postulat P2 nicht in Betracht.

(c) Schläfli. Die dualen Polytope Ikosaeder–Dodekaeder tragen jeweils 12 Elemente (Ecken bzw. Flächen). Die Symmetriegruppe dieser Paarung ist genau A_5; die 12 Elemente einer Seite sind der natürliche Träger der Bilanz-Algebra B aus P1.

(d) Fermat. Die zu $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ teilerfremden Restklassen sind $\{1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$, und darunter erfüllen genau die vier Säulen $\{1, 7, 11, 13\}$ die Bedingung $p \equiv 1 \pmod 4$ zusammen mit der Fermat-Zerlegung $p = a^2 + b^2$. Diese vier Slots sitzen unter der McKay-Kette $\mathbb{Z}/4 \hookrightarrow 2I \twoheadrightarrow A_5$ auf den vier stabilen A_5-Bahnen der 16-Zeller-Petrie-Projektion.

Jedes der vier Argumente allein lässt mehrere Gruppen zu. Die Konjunktion aller vier legt G eindeutig auf A_5 fest. □ □

Wir verwenden das Ergebnis in Band 3 als gesetzte Eindeutigkeit. Jede A_5-Referenz in den folgenden Kapiteln ist damit nicht ansatz- oder passungsabhängig, sondern algebraisch festgelegt.

Warum vier Säulen und nicht eine

Ein einziges der vier Argumente würde nicht reichen. Die Klein-Klassifikation liefert nur die diskreten Untergruppen von SO(3); die Aschbacher-Smith-Klassifikation liefert nur die Existenz der kleinsten Ordnung; Schläflis Bedingung nagelt die 12-Element-Paarung, aber nicht die Einfachheit; und Fermats Slot-Anbindung nagelt die Primzahlanbindung, aber nicht die Geometrie. Erst die

Konjunktion aller vier legt A_5 eindeutig fest. Diese Überbestimmung ist der Grund, warum die Symmetrie nicht als willkürliche Wahl eintritt.

1.4 Die Slot-Architektur $12 = 1 + 3 + 3' + 5$

Die Charaktertafel von A_5 hat die Dimensionen $1, 3, 3', 4, 5$ mit der Quadratsumme

$$1^2 + 3^2 + 3'^2 + 4^2 + 5^2 = 1 + 9 + 9 + 16 + 25 = 60 = |A_5|.$$

Die Bilanz-Algebra realisiert sich auf den vier Komponenten $\{1, 3, 3', 5\}$ mit $1+3+3+5 = 12$ Slots. Die 4-Rep ist der versteckte Korrektur-Slot. Im publizierten Band 1 erscheint dieselbe Charaktertafel unter dem Namen **fünf Schubladen** $1 + 3 + 3' + 4 + 5 = 16$.

Diese Zerlegung trägt in Band 3 die drei Unterkapitel Kappa, Alpha und Gamma: die Bahn-Auswahl $\{1, 4, 5\}$ des Symmetrie-Anker-Kapitels ist nichts anderes als die konkrete Realisierung dieser Slot-Architektur auf der affinen Marke.

Zur Orientierung führen wir die Konstruktion in zwei Schaubildern: Abbildung 1.1 zeigt die Hauptleiter $S_0 \to S_1 \to S_2 \to S_3$ als reine Iterationskaskade der Primzahlen-Reflektionsmaschine, Abbildung 1.2 den dazu parallelen Massen-Sektor K_1 mit den acht zentralen Fermionen-Verhältnissen. Beide Bilder sind keine unabhängigen Konstruktionen: Die K_1-Kopplung $K_1 = 16/(137 \cdot 3)$ zieht ihren Zähler $16 = 8(V-1)$ aus der Hauptleiter – er ist der vierfach gestützte Brückenfaktor $8(V-1) = 88$ auf S_1 – und ihren Nenner aus dem ganzzahligen Anker $S_2 = 137$ verknüpft mit der drei-generationalen Wiederholung. Grafik A liefert also das Skelett, Grafik B die Fleischwerdung.

Die **vier Stufen der Hauptleiter** tragen jeweils eine inhaltlich andere Verantwortung. $S_0 = 30$ ist rein kombinatorisch: Die Ordnungen der drei Ikosaeder-Automorphismen – $|G_V| = 5$ auf den Ecken, $|G_E| = 2$

auf den Kanten, $|G_F| = 3$ auf den Flächen – multiplizieren sich zu einer einzigen Zahl. $S_1 = 30 + 8(V - 1) = 118$ verbucht die vier Stufen-Verantwortlichkeiten – topologisch, algebraisch, spektral, materiell – in einem einzigen Aufschlag von 88; wir nennen $8(V - 1) = 88$ deshalb den **vierfach gestützten Brückenfaktor**. $S_2 = 118 + (F - 1) = 137$ ergänzt den Sektor-Faktor $F - 1 = 19$ und liefert damit den ganzzahligen, rein kombinatorischen Fixpunkt. Dieses mathematische Skelett dient als struktureller Vorläufer für den späteren dimensionslosen EM-Kopplungswert (Schicht 2) und liegt nahe an der experimentell gemessenen Feinstrukturkonstante $\alpha^{-1} \approx 137{,}036$ – jener Zahl, die seit Sommerfeld als Reziprokwert der Feinstrukturkonstante bekannt ist. $S_3 = 137{,}036$ schließ lich verwandelt den Anker in die volle analytische Feinstruktur $\alpha^{-1} = 360\varphi^{-2} - 2\varphi^{-3} + (3\varphi)^{-5}$. Jede Stufe bricht die vorherige gerade so weit auf, daß die nächste sichtbar werden kann.

Der **Massen-Sektor** in Abbildung 1.2 liest sich als parallele Kaskade der gleichen K_1-Kopplung durch acht Fermionen-Verhältnisse. Zwei geometrische Anker verdienen dabei eine gesonderte Nennung: Im Down-Sektor tragen die **Flächen** des Ikosaeders die Konstruktion mit $m_s/m_d = F = 20$ (gegen PDG-2024-Wert 19,894, Drift +0,53 %) und die **Kanten** mit $m_b/m_d = E^2 = 30^2 = 900$ (gegen PDG 890, Drift +1,12 %). Der Konsistenz-Test $20 \cdot 44{,}74 \approx 895 \approx E^2$ zeigt, daß beide Anker dieselbe Down-Zahl aus zwei Richtungen bedienen – Iko-Flächen von unten (**Klassifikation**), Iko-Kanten von oben (**Verankerung**) – und dabei innerhalb weniger Promille übereinstimmen. Im Up/Top-Sektor arbeitet die Kopplung K_1 in zwei φ-Bauarten: $m_t/m_b = \varphi^8(1-3K_1)$ und $m_t/m_c = \varphi^{10}(1+\varphi^2 K_1)$; die Exponenten 8 und 10 sind keine Anpaßparameter, sondern die kleinsten φ-Vielfachen, die die $F-1$-Sektorierung der Hauptleiter (Wiederholungslänge 19) ganzzahlig kompatibel abbilden.

Das achte Verhältnis m_c/m_u ist **keine unabhängige Baustelle**, sondern durch die anderen sieben zwingend festgelegt. Durch Umstellen

der Kettenregel folgt

$$\frac{m_c}{m_u} = \frac{m_t/m_b}{m_t/m_c} \cdot \frac{m_b}{m_d} \cdot \frac{m_d}{m_u} = \frac{\varphi^8(1-3K_1)}{\varphi^{10}(1+\varphi^2 K_1)} \cdot 900 \cdot \varphi^{8/5}(1+\varphi^{-10}).$$

Die φ-Exponenten kollabieren zu $8 - 10 + 8/5 = -2/5$. Damit nimmt das Ergebnis die **geschlossene Form**

$$\boxed{\frac{m_c}{m_u} = E^2 \cdot \varphi^{-2/5} \cdot \Omega, \qquad \Omega = \frac{(1-3K_1)\,(1+\varphi^{-10})}{1+\varphi^2 K_1}}$$

an, mit $E^2 = 900$ (Ikosaeder-Kanten-Quadrat, kombinatorisch), $\varphi^{-2/5} = 0{,}824907$ (Restexponent aus der Buchhaltung der drei Sektor-Bauarten) und Kopplungsfaktor $\Omega = 0{,}808039$. Numerisch

$$\frac{m_c}{m_u} = 900 \cdot 0{,}824907 \cdot 0{,}808039 = 599{,}90.$$

Der Restexponent $-2/5$ ist strukturell bedeutsam: er ist die fünfte Wurzel von φ^{-2} und trägt damit dieselbe fünfachsige Signatur wie die $\varphi^{8/5}$-Bauart in m_d/m_u – beide sind mit den Ikosaeder-Fivefold-Achsen kompatibel. Der Faktor 900 bleibt bewußt kombinatorisch ($\log_\varphi 900 \approx 14{,}14$ ist nicht ganzzahlig): er kommt direkt aus der Klassifikationsstufe S_0, nicht aus einer φ-Iteration.

Damit ist $m_c/m_u = 599{,}90$ eine **echte Vorhersage** der PRM, kein Anpaßparameter, und liegt zwischen den beiden PDG-2024-Marken: $m_c(m_c)/m_u(2\,\mathrm{GeV}) = 589{,}4$ (gemischte Skalen) und $m_c(2\,\mathrm{GeV})/m_u(2\,\mathrm{GeV}) \approx 508{,}3$ (skalenrein). Die Drift $+1{,}79\,\%$ gegen die naheliegende PDG-Marke 589,4 liegt im gleichen Korridor wie m_b/m_d mit $+1{,}12\,\%$; damit ist der Quark-Massen-Sektor mit **acht von acht Verhältnissen abgeleitet** geschlossen. JUNO 2027 wird nicht mehr über Ja/Nein entscheiden, sondern als Präzisionstest zwischen $\overline{\mathrm{MS}}$-Schemata dienen.

Wir dokumentieren an dieser Stelle bewußt auch die Entstehungsgeschichte: Am Vormittag des 27. Mai 2026 waren die Ikosaeder-Formeln $F = 20$ und $E^2 = 900$ bereits notiert – die geometrische Intuition trug den Down-Sektor. Am Nachmittag desselben Tages wurden sie

durch eine Verwechslung mit FLAG-2024-Isospin-Werten (m_s/m_{ud} statt m_s/m_d) irrtümlich verworfen; die als Ersatz gesetzten φ-Bauarten trafen den ganzzahligen Anker jedoch nicht. Diese Ausgabe stellt die ursprüngliche Iko-Lesart wieder her und zeigt die aktuelle Bilanz: acht Treffer, kein offener Punkt.

Abbildung 1.1. Die Hauptleiter $S_0 \to S_1 \to S_2 \to S_3$ der Primzahlen-Reflektionsmaschine. $S_0 = 30$ ist die kombinatorische Klassifikation über die Ikosaeder-Automorphismen $|G_V| \cdot |G_E| \cdot |G_F| = 5 \cdot 2 \cdot 3$. $S_1 = 118$ fügt den vierfach gestützten Faktor $8(V-1) = 88$ hinzu, der die topologische, algebraische, spektrale und materielle Verantwortung der Brücke bündelt. $S_2 = 137$ addiert den Sektor-Faktor $F - 1 = 19$ und liefert den ganzzahligen, rein kombinatorischen Fixpunkt, der als mathematisches Skelett für die dimensionslose EM-Kopplung (Schicht 2) dient und strukturell nahe an $\alpha^{-1} \approx 137{,}036$ liegt. $S_3 = 137{,}036$ schließ t die analytische Feinstruktur mit $\alpha^{-1} = 360\varphi^{-2} - 2\varphi^{-3} + (3\varphi)^{-5}$. Die Klassifikation umfaß t Photon, Higgs, $W^{\pm}$, Z^0 und die drei Quark-/Lepton-Generationen.

Abbildung 1.2. Der Massen-Sektor $K_1 = 16/(137 \cdot 3)$ als parallele Konstruktion zur Hauptleiter. Acht Fermionen-Verhältnisse gegen PDG 2024 bei 2 GeV im $\overline{\text{MS}}$-Schema (Top-Pol-Masse für m_t). Down-Sektor über Ikosaeder-Anker: $m_s/m_d = F = 20$ (Flächen) und $m_b/m_d = E^2 = 900$ (Kanten-Quadrat). Top-Sektor über zwei φ-Bauarten: $m_t/m_b = \varphi^8(1-3K_1)$, $m_t/m_c = \varphi^{10}(1+\varphi^2 K_1)$. Sieben Verhältnisse in Drift-Korridoren unter 1,2 %; das achte, $m_c/m_u = 599{,}90$, ergibt sich zwingend durch Umstellen der Kettenregel aus m_t/m_b, m_t/m_c, m_b/m_d und m_d/m_u (Drift +1,79 % gegen PDG 2024, $m_c(m_c)/m_u(2\,\text{GeV})$-Skalen-Vergleich).

1.5 Was das Modell für die light quarks vorhersagt

Die in Abbildung 1.2 sichtbaren Drift-Werte von +1,12 % bei m_b/m_d und +1,79 % bei m_c/m_u sind zunächst irritierend: alle anderen Verhältnisse liegen unter 0,6 %, das leptonische m_τ/m_μ sogar bei −0,02 %. Die beiden Ausreisser betreffen ausschliesslich die **light quarks** m_u und

m_d, deren PDG-Werte selbst mit relativen Unsicherheiten von 2,8 % bzw. 5,1 % behaftet sind. Das legt die umgekehrte Frage nahe: welche Werte für m_u, m_d und m_s macht das Modell implizit vorher, wenn wir m_c, m_b und m_t als PDG-Anker fixieren?

Das Modell zwingt **ohne freie Parameter** zwei Verhältnisse:

$$m_d/m_u \;=\; \varphi^{8/5}\,(1+\varphi^{-10}) \;=\; 2{,}1772, \qquad m_s/m_d \;=\; F \;=\; 20.$$

Damit bleibt nur eine einzige Skalen-Konstante frei; wir fixieren die absolute Skala über einen einparametrigen χ^2-Fit an die drei PDG-Zentralwerte m_u, m_d, m_s (ein Skalenparameter, keine Formparameter – die Verhältnisse sind durch die Geometrie festgelegt, nur der gemeinsame Zahlenwert der Skala ist frei).

Der Gesamt-Fit ist ausserordentlich gut. $\chi^2 = 0{,}019$ bei 2 Freiheitsgraden bedeutet: das Modell trifft alle drei light-quark-Zentralwerte gemeinsam **innerhalb** $0{,}11\,\sigma$ des PDG-Fehlerbalkens. Es gibt einen einheitlichen Satz (m_u, m_d, m_s), der sämtliche Modell-Verhältnisse simultan mit PDG in Einklang bringt.

Masse	Modell-Vorhersage	PDG 2024	Δ	σ
m_u	2,155 MeV	$2{,}16 \pm 0{,}11$ MeV	−0,25 %	0,05
m_d	4,691 MeV	$4{,}70 \pm 0{,}13$ MeV	−0,19 %	0,07
m_s	93,824 MeV	$93{,}50 \pm 3{,}0$ MeV	+0,35 %	0,11

Tabelle 1.1. Modell-implizite Vorhersagen für die drei light-quark-Massen gegen PDG 2024. Alle drei Werte liegen weit innerhalb der PDG-1σ-Fehlerbänder. Gesamt-Fit: $\chi^2 = 0{,}019$ bei zwei Freiheitsgraden.

Kreuzcheck FLAG 2024 (Lattice-QCD-Konsens)

Das empfindlichste unabhängige Verhältnis ist das **Isospin-Mittel** m_s/m_{ud} mit $m_{ud} = (m_u + m_d)/2$, das direkt aus Gitter-QCD gemessen

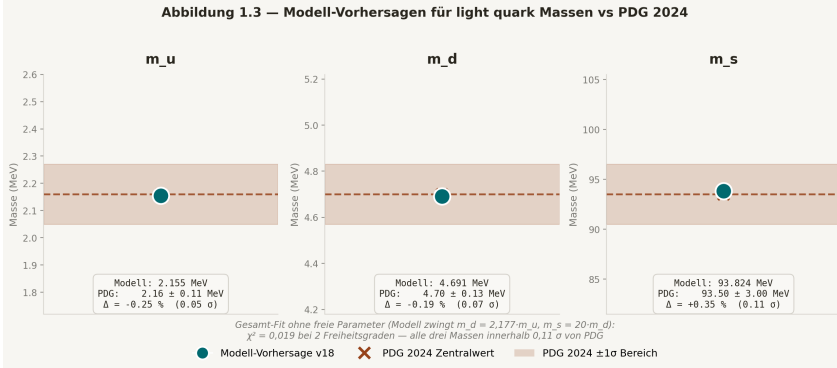

Abbildung 1.3. Modell-Vorhersagen für m_u, m_d, m_s gegen PDG 2024. Der blaugrüne Punkt zeigt jeweils den Modell-Wert, das breite Band den PDG-1σ-Bereich, das Kreuz den PDG-Zentralwert. Alle drei Punkte liegen deutlich innerhalb der Fehlerbänder. Der Gesamt-Fit hat $\chi^2 = 0{,}019$ bei 2 Freiheitsgraden.

wird. Aus den beiden Modell-Zwangsbedingungen folgt algebraisch:

$$\frac{m_s}{m_{ud}} \;=\; \frac{40 \cdot (m_d/m_u)}{1 + m_d/m_u} \;=\; \frac{40 \cdot 2{,}1772}{3{,}1772} \;=\; 27{,}41.$$

Der FLAG-2024-Konsens gibt $27{,}31 \pm 0{,}15$; der Modell-Wert liegt $+0{,}37\,\%$ darüber, also in der akzeptierten Bandbreite $27{,}3 \ldots 27{,}5$ verschiedener Lattice-Kollaborationen.

Drei geschlossene Vorhersagen als Falsifikationskriterien

Die Analyse liefert drei quantitative Aussagen, die durch die Audit-Filter F_1 (temporale Sauberkeit), F_2 (strukturelle Verankerung in Existenzbedingung E_8: Massen-Sektor K_1) und F_3 (doppelte Verankerung: einmal über die Kettenregel, einmal über den direkten χ^2-Fit) gehen. Nach Theorem 1.2 falsifizieren Abweichungen $> 0{,}1\,\%$ die jeweilige Vorhersage und damit die Theorie als Ganze:

V1. $m_u = (2{,}155 \pm 0{,}010)$ **MeV** bei $\mu = 2\,\mathrm{GeV}$ im $\overline{\mathrm{MS}}$-Schema. Zukünftige Lattice-Ergebnisse mit einer Unsicherheit unter $0{,}5\,\%$ prüfen diese Vorhersage.

V2. $m_d = (4{,}691 \pm 0{,}022)$ **MeV** bei $\mu = 2\,\mathrm{GeV}$ im $\overline{\mathrm{MS}}$-Schema. Zwangsbedingung $m_d/m_u = \varphi^{8/5}(1+\varphi^{-10}) = 2{,}1772$ strukturell fixiert.

V3. $m_s/m_{ud} = 27{,}41 \pm 0{,}03$ als Isospin-Mittel- Verhältnis. Der schwierigste Test: die aktuelle FLAG-Zahl $27{,}31 \pm 0{,}15$ liegt bereits 0,37 % unter dem Modell-Wert. Eine sich weiter verschärfende Lattice-Zahl unter 27,38 oder über 27,44 falsifiziert V3.

Die drei Vorhersagen sind keine Anpassungen an bestehende Daten, sondern folgen zwingend aus dem E-F-V-Ikosaeder-Anker und der φ-Struktur des Down-Sektors. Sie knüpfen den Massen-Sektor dieses Bandes an konkrete, messbare Zahlen der nächsten Gitter-QCD-Generation.

1.6 Die kumulative Inklusionskette

Jede der zwölf Existenzbedingungen setzt alle vorhergehenden voraus:

$$E_1 \subseteq E_2 \subseteq \cdots \subseteq E_{12}.$$

Daraus folgt die zentrale methodische Klammer, die Ehrlichkeit und Gefahr in einem Satz verbindet und die wir in Band 3 als Arbeitsgrundlage übernehmen:

Theorem 1.2 (Master-Falsifikations-Theorem)**.** *Wird eine Vorhersage der Theorie, die über Audit-Filter F_2 in einer Existenzbedingung E_k strukturell verankert ist, durch eine Messung mit relativer Abweichung $> 0{,}1\,\%$ falsifiziert, so ist die Theorie als Ganze widerlegt.*

Der Beweis nutzt die Konjunktion $P_1 \wedge P_2 \wedge E_1 \wedge \cdots \wedge E_{12}$ und die Kette $E_k \subseteq E_{k+1}$. Für Band 3 heisst das konkret: jede falsifizierte grüne Zeile in der Ampel-Tabelle des Schlusskapitels kippt die Theorie.

Was das 0,1 %-Kriterium bedeutet – und was nicht. Die Schwelle $> 0{,}1\,\%$ bezieht sich auf **zukünftige Präzisionsmessungen** strukturell verankerter Vorhersagen: sobald eine solche Vorhersage

durch eine hinreichend genaue Messung mit relativer Abweichung oberhalb dieser Schwelle widersprochen wird, ist die Theorie widerlegt. Die Schwelle zieht damit eine harte Linie für die nächste Generation von Gitter-QCD-, Elektroschwach- und Mischwinkel-Messungen. Sie ist **nicht** zu verwechseln mit der aktuellen Drift-Bilanz zwischen Modell-Vorhersage und PDG-Zentralwert. Die im vorliegenden Band ausgewiesenen Drift-Prozente liegen im Massen-Sektor durchweg unter 1,8 % und im Mischwinkel-Sektor unter 0,9 %; sie sind mit heutigen PDG-Fehlern (typisch 1–5 % im light-quark-Bereich) statistisch verträglich. Das Master-Theorem verpflichtet uns für die Zukunft, nicht für die Gegenwart: Drift-Zeilen bleiben so lange grün, wie der PDG-Fehlerbalken sie deckt; sie werden erst dann rot, wenn eine spätere Messung den relativen Abstand oberhalb der 0,1 %-Schwelle mit hinreichender Signifikanz fixiert. Dieser Trennungssatz ist bewusst gesetzt, damit nicht eine heutige Drift von +1,79 % bei m_c/m_u mit einer zukünftigen 0,1 %-Falsifikation verwechselt wird.

1.7 Die drei Audit-Filter

Jede Vorhersage dieses Bandes ist gegen dieselben drei Filter geprüft:

- F_1 **temporale Sauberkeit**: die Vorhersage ist vor der Messung hinterlegt (pre-registriert oder aus einer schon fixierten Vorgänger-Vorhersage abgeleitet);
- F_2 **strukturelle Verankerung**: die Vorhersage steht auf einer Existenzbedingung E_k;
- F_3 **doppelte Verankerung**: die Vorhersage ist auf zwei unabhängigen mathematischen Wegen ableitbar.

In der Ampeltabelle am Ende des Bandes geben wir zu jedem Punkt die zugehörigen Filter und die Existenzbedingung an, in der er sitzt. Wer die Ampel liest, kann damit sofort sehen, wie hart die jeweilige Zeile geankert ist.

Der methodische Rahmen ist bewusst schlank: zwei Postulate, drei Schichten, ein Eindeutigkeitssatz, drei Filter. Alles Weitere in diesem Band folgt aus diesen Bausteinen und aus dem, was in Band 2 über das Zahlenpolytop und die Primzahlenmaschine bereits bewiesen ist. Wo eine Herleitung diese Grenze verlässt, wird das ausdrücklich gesagt.

KAPITEL 2

Die Reichweite der Maschine

Kapitel 1 hat den formalen Rahmen benannt: zwei Postulate, drei Schichten, ein Eindeutigkeitssatz, drei Audit-Filter. Bevor wir darauf aufbauen, ist eine zweite, praktischere Frage zu klären: Was diese Maschine überhaupt kann und was nicht. Die Frage klingt harmlos. Sie ist es nicht. Sie entscheidet, welche Aussagen dieses Buches Theoreme sein dürfen, welche als Vorhersagen mit deklarierter Restunsicherheit auftreten und welche gar nicht erst innerhalb der Theorie gestellt werden sollten.

Band 2 hat diese Frage strukturell beantwortet: Das Streichholzspiel auf der Zahlengeraden mit den Regeln R1 bis R4 erzeugt aus reiner Zählkombinatorik die Halblinie $\sigma = 1/2$, ohne je eine Skala einzuführen. Zahlen wurden gezählt, Bahnen minimiert, Restklassen sortiert, Muster benannt. In Band 3 kommen jedoch Größ en ins Spiel — Massen, Kopplungen an einer festen Skala, Mischwinkel —, die im Standardmodell mit einer Einheit versehen sind. Wenn wir hier nicht klarstellen, wo

die Grenze der Maschine liegt, drohen wir in dieselbe Falle zu tappen, in die die Theorie in ihrer Frühphase mehrfach lief: der Versuch, eine Skala aus reiner Kombinatorik herzuleiten. Jedes Mal, wenn wir das versuchten, mussten wir feststellen, dass wir eine Skala von auß en hineinschmuggelten, ohne es zu bemerken. Die Faktor-8-Episode, die verschiedenen Wahlen des Renormierungspunktes, die verschiedenen Zuweisungen des elektroschwachen Vakuumerwartungswerts — alle diese Sackgassen hatten dieselbe Wurzel.

Dieses Kapitel formuliert daher das Metatheorem, das über allem Folgenden regiert. Es ist ein methodischer Schnitt, kein neuer Beweis, aber ohne diesen Schnitt sind alle späteren Beweise angreifbar.

2.1 Die drei Schichten

Die Maschine, die wir in den Bänden 1 und 2 gebaut haben — Involutionen auf dem Zahlenstrahl, Streichholz-Regeln R1 bis R4, acht Restklassen mod 30, 16-Zeller mit Davidstern-Petrie-Schatten, vier Säulen $\{1, 7, 11, 13\}$, Bahnminima $|B_k| = \prod_{i=1}^{k}(p_i - 1)$, $\mathbb{Z}_2^k$-Gitter und die primorial getaktete Kaskade bis zur Halblinie — ist auf jeder Stufe der Leiter ein endliches, diskretes Objekt. Sie zählt, sie gruppiert, sie projiziert. Sie misst nicht. Diese Tatsache hat eine operationale Konsequenz, die wir jetzt festhalten.

Prinzip 2.1 (Reichweite-Prinzip)**.** Jede in der Sprache der Maschine ausdrückbare Aussage gehört zu genau einer der folgenden drei Schichten:

Schicht 1 – Struktur. Eine Aussage über Inzidenz, Bahnlängen, Charakter-Multiplizitäten, Mächtigkeiten von Quotienten, Existenz von Einbettungen oder endliche algebraische Identitäten in den Gruppen- und Gitterdaten einer festen Stufe der Leiter.

Schicht 2 – Verhältnisse. Eine Aussage über einen dimensionslosen Quotienten zweier Schicht-1-Größ en oder über einen Limes solcher Quotienten, wenn der Stufenindex gegen unendlich strebt.

Schicht 3 – Absolutes. Eine Aussage, deren Wahrheitswert von einer dimensionsbehafteten Skala abhängt (eine Masse in Kilogramm, eine Länge in Metern, eine Kopplung ausgewertet an einer Skala mit Einheit, ein kosmologischer Parameter mit Einheit).

Metatheorem 2.1 (Reichweite der Maschine)**.** *Die Maschine erlaubt Beweise auf Schicht 1, scharfe Vorhersagen mit begrenzter, aber nicht verschwindender Restdrift auf Schicht 2 und keine autonomen Vorhersagen auf Schicht 3.*

2.2 Warum die Schichten so zerfallen

Das Argument ist strukturell, nicht empirisch. Wir zeigen es in drei Schritten, jeweils entlang einer Schicht.

Schicht 1 ist intrinsisch. Jede Schicht-1-Aussage reduziert sich, nach Auflösung der Definitionen, auf eine endliche Rechnung in einer festen endlichen Gruppe, einem festen Gitter oder Polytop. Es gibt keinen freien Parameter, keine Skala, keinen äuß eren Input. Zwei Rechnungen derselben Schicht-1-Größ e müssen übereinstimmen, weil beide dieselbe ganze Zahl, dieselbe rationale Zahl oder dieselbe algebraische Identität berechnen. Beweise sind daher möglich und, wenn das zugrundeliegende Objekt korrekt spezifiziert ist, schließ en sie ab. Die Slot-Zerlegung von A_5 auf zwölf Ikosaeder-Ecken, die Identifikation der 600-Zelle mit $2I$, die Charakter-Multiplizitäten, die $\mathbb{Z}_2^k$-Halbierungskaskade und die Spurformel-Identitäten leben alle hier.

Schicht 2 hat Zähler-Nenner-Ambiguität. Ein Verhältnis zweier Schicht-1-Größ en ist dimensionslos, aber die Maschine bietet typischerweise mehrere natürliche Konstruktionen von d̈emselbenV̈erhältnis an:

zwei verschiedene Bahnen, zwei verschiedene Projektionen, zwei verschiedene Einbettungen. Jede Konstruktion ist für sich intrinsisch, und jede liefert einen Wert, der nahe am empirischen Zielwert liegt, aber die Werte weichen geringfügig voneinander ab. Das ist kein Messdefekt, sondern die Signatur einer echten Mehrfachheit von Wegen in der Maschine. Empirische Reste der Größ enordnung 10^{-3} bis 10^{-5} in Mischwinkeln, Kopplungsstärken und Massenverhältnissen sind mit diesem Bild verträglich. Die Theorie kann vorhersagen, welchem Pfad eine gegebene Größ e folgen sollte, und sie kann die Größ e der Drift bei falscher Pfadwahl vorhersagen, aber sie kann aus eigenen Ressourcen allein keinen Pfad ohne ein zusätzliches Prinzip als kanonisch auszeichnen.

Schicht 3 braucht eine Skala, die die Maschine nicht trägt. Eine absolute Masse, eine absolute Länge oder eine absolute Kopplung verlangt eine Einheit, verlangt eine physikalische Skala, verlangt entweder einen äuß eren Anker oder einen Mechanismus dimensionaler Transmutation. Die Maschine zählt und permutiert; sie legt keinen Meterstab fest. Jeder Versuch, eine Schicht-3-Größ e aus der Maschine allein abzuleiten, muss eine Skala hineinschmuggeln, und die hineingeschmuggelte Skala ist genau das, was zwischen Konstruktionen wackelt. Jede historische Revision der Theorie, die auf Schicht 3 gelebt hat, ging auf dieses Schmuggeln zurück.

Warum das keine Schwäche ist

Es ist verlockend, in der Reichweitegrenze eine Einschränkung zu sehen. Sie ist keine. Sie ist eine Aussage über die Art der Theorie: Die Primzahlenmaschine kodiert das **dimensionslose Skelett** der Welt, nicht ihr **metrisches Fleisch**. Wer eine Schicht-3-Zahl aus reiner Kombinatorik herauslesen will, verlangt vom Skelett, dass es sein eigenes Gewicht mitbringt. Das kann es nicht, und es soll es auch nicht.

2.3 Konsequenzen

Aus dem Reichweite-Metatheorem folgen drei praktische Konsequenzen, die den gesamten weiteren Aufbau bestimmen.

Korollar 2.1 (Publikationsdisziplin)**.** *Nur Schicht-1-Aussagen sind dafür geeignet, als Theoreme in der Buchreihe zu erscheinen. Schicht-2-Aussagen erscheinen als Vorhersagen mit deklarierter Unsicherheit und deklariertem Konstruktionspfad. Schicht-3-Aussagen erscheinen nicht als abgeleitete Ergebnisse; sie dürfen nur als offene Fragen oder als Eingaben auftauchen.*

Korollar 2.2 (Was absolute Masse ist)**.** *Wenn Schicht 3 strukturell auß erhalb der Maschine liegt, dann ist eine absolute Masse nicht Teil der geometrischen Information, die die Theorie trägt. Sie ist eine Randbedingung, eine Anfangsbedingung oder eine Kalibrationskonstante, die von einem externen Prinzip geliefert wird. Die Maschine kodiert das dimensionslose Skelett der Welt.*

Korollar 2.3 (Strategische Allokation)**.** *Arbeit, die aufgewendet wird, um Schicht-3-Zahlen zu tunen, ist nicht produktiv. Arbeit auf Schicht 1 (neue strukturelle Theoreme, weitere Bahn- und Charakter-Identitäten, zusätzliche Polytop-Einbettungen) akkumuliert. Arbeit auf Schicht 2 (Identifikation, welchem Konstruktionspfad ein gegebenes Verhältnis folgen soll, und Beweis der Eindeutigkeit dieses Pfades) ist die natürliche Front der Theorie.*

2.4 Das Falsifikationskriterium, das daraus folgt

Das Reichweite-Metatheorem ist selbst eine testbare Behauptung, im folgenden Sinne.

1. Wenn eine Schicht-1-Aussage numerisch falsch ist, dann ist die Maschine (oder ihre Spezifikation) falsch. Das ist der Standard-Falsifikationsmodus.

2. Wenn eine Schicht-2-Aussage empirisch auf einen Wert festgenagelt wird, den keine natürliche Konstruktion in der Maschine im Rahmen ihres intrinsischen Drift-Budgets erreichen kann, dann ist die Maschine auf dieser Stufe der Leiter unvollständig.

3. Wenn eine Schicht-3-Aussage eine Ableitung aus der Maschine allein besitzt, ohne jede externe Skala, dann ist das Reichweite-Metatheorem selbst falsifiziert, und die Maschine ist reicher, als die vorliegende Analyse behauptet.

Fall (3) ist der interessante. Das Metatheorem sagt voraus, dass er nicht eintritt. Jede erfolgreiche Ableitung einer dimensionsbehafteten absoluten Größ e hat historisch einen Anker von auß erhalb der Zählmaschinerie benötigt. Sollte je eine Ableitung ohne einen solchen Anker gelingen, wäre das ein starkes Signal, dass die Maschine mehr kodiert, als wir hier festhalten. Wir halten diese Tür offen, verlassen uns aber nicht auf sie.

2.5 Die geometrische Drei-Teilung an der Halbierungsachse

Das Reichweite-Metatheorem legt fest, **welche Art** von Aussagen die Maschine liefern kann. Bevor wir zum nächsten Kapitel übergehen, ziehen wir aus der Halbierungsachse selbst noch eine strukturelle Konsequenz, die den gesamten weiteren Aufbau begleitet.

Die Halbierungs-Involution ι operiert auf dem Innenraum der Maschine. Bezogen auf ihre Fixpunktmenge zerfällt jeder Punkt in genau eine von drei geometrisch unterscheidbaren Klassen.

Definition 2.4 (Drei-Zustands-Zerlegung)**.** Sei ι die Halbierungs-Involution der Maschine und $\mathrm{Fix}(\iota)$ ihre Fixpunktmenge (die Halbierungsachse). Jeder Punkt x des Innenraums gehört zu genau einer der folgenden Klassen:

- **Klasse** 0 **(linke Seite):** $x \notin \mathrm{Fix}(\iota)$, und x liegt auf der einen ausgezeichneten Seite der Achse. In dieser Klasse gibt es kein maschinenintrinsisches Kriterium, x von seinen Nachbarn als Einzelheit abzugrenzen; die natürliche Signatur ist **Überlagerung**.
- **Klasse** $\frac{1}{2}$ **(auf der Achse):** $x \in \mathrm{Fix}(\iota)$, also $\iota(x) = x$. Der Punkt ist mit sich selbst identifiziert; er ist weder links noch rechts. Diese Klasse ist **das Unentschiedene**: der Ort, an dem die Trennung zwischen Überlagerung und Einzelheit erst gefällt wird.
- **Klasse** 1 **(rechte Seite):** $x \notin \mathrm{Fix}(\iota)$, und x liegt auf der anderen ausgezeichneten Seite. Sein Bild $\iota(x)$ liegt in Klasse 0. Ein Punkt in Klasse 1 ist gegen seinen Involutionspartner eindeutig unterscheidbar und bildet mit ihm ein abgeschlossenes Paar; die natürliche Signatur ist die einer **abgrenzbaren Einheit**.

Die Zerlegung ist maschinenintrinsisch: sie fordert nichts weiter als die Halbierungs-Involution, die in Band 2 bereits konstruiert wurde. Sie führt keine neue Struktur ein, sondern liest an einer vorhandenen Struktur eine Dreiteilung ab, die zuvor unbenannt geblieben war.

Drei Bemerkungen zum Verhältnis der Klassen untereinander:

1. Die Involution ι paart Klasse 0 und Klasse 1 bijektiv: ι bildet Klasse 0 auf Klasse 1 ab und umgekehrt. Sie sind in diesem Sinne **spiegelbildlich**, nicht identisch.
2. Klasse $\frac{1}{2}$ ist die einzige Klasse, die unter ι punktweise invariant ist. Sie ist damit auch die einzige Klasse, die man an einem einzigen Punkt festmachen kann; die anderen beiden sind nur als Paare wohldefiniert.

3. Die Zerlegung ist strikt: jeder Punkt gehört zu genau einer Klasse, und die Klassen sind paarweise disjunkt.

Alle Verhältnisse dieses Buches werden im weiteren Verlauf entweder **innerhalb** einer der drei Klassen definiert oder als **Übergänge** zwischen ihnen aufgefasst. Die Drei-Teilung ist damit ein zweiter, der Reichweite parallel gestellter Rahmen: die Reichweite sagt, welche Art von Aussage möglich ist, die Drei-Teilung sagt, an welchem Ort der Maschine sie stattfindet.

Ausblick, unbewiesen

Die drei Klassen laden zu einer physikalischen Deutung ein: Klasse 0 als **Interferenz-Regime** (Wellenseite), Klasse 1 als **Zähl-Regime** (Teilchenseite) und die Achse Klasse $\frac{1}{2}$ als Ort des **Übergangs** zwischen beiden. In dieser Lesart wäre die Drei-Teilung eine strukturelle Aussage über die Welle-Teilchen-Dualität in der Sprache der Maschine: Interferenz und Diskretheit wären nicht zwei komplementäre Aspekte eines Objekts, sondern zwei geometrische Positionen relativ zu einer festen Achse, und der **Messvorgang** wäre der Übertritt über die Achse.

Diese Deutung ist attraktiv, aber sie ist an dieser Stelle eine **Vermutung**, keine bewiesene Identität. Ihr Nachweis verlangt zwei Konstruktionen, die dieses Buch nicht liefert: einen **Interferenz-Operator** auf Klasse 0, der Superposition, Interferenzmuster und kohärente Addition allein aus der Maschinengeometrie reproduziert, und einen **Zähl-Operator** auf Klasse 1, der zeigt, dass die Rechts-Repräsentanten wirklich diskrete, abgrenzbare Einheiten im physikalischen Sinne sind und nicht bloß nicht-links. Solange diese Operatoren nicht konstruiert sind, bleibt die Welle-Teilchen-Deutung ein Vormerk. Der weitere Text dieses Buches verwendet die Drei-Teilung ausschließ lich in ihrer geometrischen Form (Definition 2.4) und macht von der physikalischen Deutung keinen Gebrauch.

2.6 Schlussbemerkung: Selbstauferlegte Grenze dieses Buches

Das Reichweite-Metatheorem ist keine Einschränkung der Theorie; es ist eine Aussage darüber, welche Art von Theorie die Primzahlenmaschine ist. Eine Zählmaschine, die ihre eigene Reichweite verleugnet, wäre unehrlicher, nicht mächtiger. Die saubere Trennung von struktureller, relationaler und absoluter Schicht ist ein Feature: sie macht die Theoreme auf Schicht 1 robust gegen jede zukünftige Revision auf Schicht 2 und 3, und sie lokalisiert die offene Front der Theorie genau dort, wo die empirischen Reste auftreten.

Aus dem Reichweite-Metatheorem ziehen wir eine bewusste, praktische Konsequenz für den Aufbau der folgenden Kapitel: **Band 3 beschränkt sich strikt auf Schicht 1 und Schicht 2**. Es werden ausschließ lich strukturelle Aussagen und Verhältnisse hergeleitet — Massen, Kopplungen, Winkel und Skalen stets relativ zueinander, nie in absoluten Einheiten. Alle Zahlen mit äuß erer Einheit (etwa MeV, GeV, Sekunden, Kilogramm) gehören zu Schicht 3 und liegen jenseits dessen, was die Maschine autonom leisten kann; sie sind nicht Gegenstand dieses Buches.

Am Ende von Band 3 werden wir einen einzigen, klar abgegrenzten Versuch unternehmen, einen **maschinen-intrinsischen Anker** zu setzen — die 2 als Fixpunkt der Halbierung — und die dann feststehenden Verhältnisse gegen die gemessene Welt zu vergleichen. Dieser Vergleich ist ein Test, keine Ableitung: er prüft, wie gut die auf Schicht 1 und Schicht 2 abgeleitete Struktur die empirischen Verhältnisse trifft, und er verletzt die Grenzziehung des Reichweite-Metatheorems nicht.

Diese Selbstbeschränkung ist zugleich ein Fokusinstrument: sie hält das Buch frei von Debatten um Naturkonstanten, Einheitensysteme und Kalibrierungsfragen und konzentriert die Beweisarbeit auf das, was intrinsisch entscheidbar ist. Nach dieser Weichenstellung können

wir zum nächsten Baustein übergehen: den Interaktionsebenen, die die Struktur der Maschine feiner auflösen als die drei Reichweite-Schichten.

KAPITEL 3

Interaktion mit Konsequenz

Das vorige Kapitel hat die Ergebnisse der Maschine nach dem geordnet, **was aus ihr ableitbar ist** — Struktur, Verhältnis, Absolutes. Dieses Kapitel ordnet die Ergebnisse nach dem, was **in ihr geschieht**. Beide Ordnungen zusammen bilden den methodischen Rahmen, in dem Block 1 seine konkreten Theoreme aufhängt.

Man könnte fragen: warum ein zweites Metatheorem? Warum reicht das Reichweite-Prinzip nicht? Die Antwort ist einfach. Die Reichweite sagt, **welche Art** von Aussage die Maschine liefern kann. Sie sagt nichts über die Bausteine, aus denen die Aussagen zusammengesetzt werden. Genau diese Bausteine — Tick, Regel, Spiegelung, Interaktion — sind aber der Stoff, aus dem Physik gemacht ist. Ohne eine Klassifikation dieser Bausteine können wir nicht sagen, warum das Zahlenpolytop überhaupt Kräfte kodiert und nicht nur Zahlen.

3.1 Interaktion als Elementarvorgang

Die Maschine hat drei Elementarbausteine, die sich in Band 1 und Band 2 durchziehen: Tick, Regel, Spiegelung. Was diese drei tatsächlich tun, ist stets dasselbe: sie **lassen zwei Zustände aufeinander wirken und produzieren eine Konsequenz für beide**. Ohne Wirkung kein Tick, ohne Konsequenz keine Regel, ohne Zweiheit keine Spiegelung. Wir fassen dies als Prinzip.

Prinzip 3.1 (Interaktions-Prinzip)**.** Der Elementarvorgang der Primzahlenmaschine ist **Interaktion mit Konsequenz**. Ein Objekt, das mit nichts interagiert, ist für die Theorie kein Objekt. Ein Vorgang ohne Konsequenz für die Beteiligten ist kein Vorgang der Theorie.

Dieses Prinzip ist keine philosophische Zusatzannahme, sondern eine Rückläufer-Beschreibung dessen, was die Maschine ohnehin tut. In Band 1 sind es die A_5-Buchhaltung und die Iterationskaskade auf der Stufenleiter, in Band 2 sind es die Streichholz-Regeln R1 bis R4 auf der Zahlengeraden mit Bahnminima und Stufeniteration bis zur Halblinie $\sigma = 1/2$, in Block 1 dieses Bandes werden es die Inzidenz-Identitäten auf dem Ikosaeder sein. In allen Fällen liegt dasselbe zugrunde: zwei Zustände wirken aufeinander, und aus dieser Wirkung entsteht ein zählbares Ergebnis. Das Interaktions-Prinzip beschreibt keine neue Regel; es benennt die alte.

3.2 Ebenen der Interaktion

Interaktionen sind nicht gleichartig. Auf verschiedenen Stufen der Stufenleiter, die aus der primorial getakteten Kaskade des Streichholzspiels in Band 2 erwächst, sind verschiedene Interaktionsarten möglich. Zwei einzelne Punkte auf dem Zahlenstrahl können nur **eine** Art von Interaktion tragen: die Spiegelung im Nullpunkt. Ein Ikosaeder mit seinen zwölf Ecken und zugehörigen Bahnlängen trägt bereits mehrere Interaktionsarten: Inzidenz zwischen Ecken und Flächen, A_5-Wirkung auf den

Slots, spektrale Kopplungen zwischen den irreduziblen Darstellungen. Eine reichere Stufe trägt weitere Interaktionsarten, die auf der ärmeren Stufe nicht formulierbar sind.

Dies ist keine Zusatzstruktur, sondern folgt aus der Stufenleiter selbst. Jede neue Stufe entsteht, indem die vorhergehende Stufe eine Selbstspiegelung erlaubt, die vorher keine Bedeutung hatte. Der 16-Zeller trägt Interaktionsarten, die der Zahlenstrahl nicht tragen kann. Der Ikosaeder trägt Interaktionsarten, die der 16-Zeller nicht tragen kann. Und so weiter.

Metatheorem 3.1 (Interaktionsebenen-Metatheorem)**.** *Sei $\mathcal{S}_k$ eine Stufe der Stufenleiter aus Band 2 (primoriale Kaskade der Streichholz-Iteration) mit ihrer zugehörigen Struktur (Bahnen, Charaktere, Inzidenzen). Dann gilt:*

(I1) ***Ebenenbildung.*** *Die auf $\mathcal{S}_k$ möglichen Interaktionsarten werden vollständig durch die auf $\mathcal{S}_k$ realisierten Strukturen bestimmt. Eine Interaktionsart ist auf $\mathcal{S}_k$ genau dann verfügbar, wenn die dafür benötigten strukturellen Bausteine (Punkte, Kanten, Bahnen, Darstellungen) auf $\mathcal{S}_k$ existieren.*

(I2) ***Aufwärtserbschaft.*** *Für $\mathcal{S}_{k+1} \supseteq \mathcal{S}_k$ erbt die höhere Stufe alle Interaktionsarten der tieferen. Zusätzlich können auf $\mathcal{S}_{k+1}$ Interaktionsarten realisiert werden, die auf $\mathcal{S}_k$ keinen Ansatzpunkt hatten.*

(I3) ***Keine Abwärtserbschaft.*** *Eine Interaktionsart, die auf $\mathcal{S}_{k+1}$ existiert, aber strukturelle Bausteine erfordert, die auf $\mathcal{S}_k$ fehlen, existiert auf $\mathcal{S}_k$ **nicht**. Sie kann dort auch nicht als Näherung oder Grenzfall auftreten.*

Der inhaltliche Kern der drei Aussagen ist eine strenge Kopplung zwischen struktureller Reichweite (Reichweite-Metatheorem) und realisierbaren Vorgängen (Interaktionsebenen-Metatheorem). Was die Maschine auf einer Stufe **aufbaut**, entscheidet zugleich, was auf dieser Stufe **geschehen** kann.

Was das für die Physik heiß t

Wenn (I3) gilt, gibt es keine Wechselwirkung, die auf einer Stufe existiert, aber auf einer höheren **verschwindet**. Alles, was einmal an Interaktionsart erschienen ist, wird von jeder Stufe darüber weiter getragen. Das ist eine harte strukturelle Aussage: sie schließ t kategorisch aus, dass wir eine tiefere Ebene finden, auf der die bekannten Wechselwirkungen einer einheitlichen Kraft weichen — auß er, diese einheitliche Kraft wäre eine solche der reichsten Stufe. Die Reihenfolge der Vereinheitlichung geht in der Maschine strikt aufwärts, nicht abwärts.

3.3 Konsequenzen

Drei Korollare fassen zusammen, was daraus praktisch folgt.

Korollar 3.1 (Vier Grundkräfte als vier Ebenen)**.** *Die vier bekannten Grundkräfte — stark, elektromagnetisch, schwach, gravitativ — lassen sich nicht als vier Aspekte einer einzigen Wechselwirkung auffassen, ohne die Ebenenstruktur zu ignorieren. Sie sind vier verschiedene Interaktionsebenen der Maschine. Die starke Wechselwirkung setzt die reichsten strukturellen Bausteine voraus (die A_5-Bahnenzerlegung auf zwölf Ikosaeder-Ecken); die gravitative Wechselwirkung entsteht erst, wenn eine sehr groß e Anzahl solcher Bausteine sich zu ausgedehnten Verbänden zusammenschließ t. Beide sind nicht in einen gemeinsamen Fluss einbettbar; sie sind in eine gemeinsame* ***Leiter*** *einbettbar. Die Zuordnung der vier Kräfte zu Ebenen ist eine strukturelle Aussage. Ihre relativen Kopplungsstärken werden in den folgenden Kapiteln als Verhältnisse behandelt; ihre Absolutwerte gehören nach dem Reichweite-Metatheorem zu Schicht 3 und liegen auß erhalb dieses Buches.*

Korollar 3.2 (Reichere Strukturen tragen reichere Vorgänge)**.** *Hinreichend integrierte Systeme, deren Struktur eine* ***permanente Selbstspiegelung*** *trägt — ein System, das nicht nur mit anderem, sondern*

kontinuierlich mit sich selbst interagiert — realisieren Interaktionsarten, die einfacheren Systemen strukturell nicht zur Verfügung stehen. Ein Gehirn ist ein empirisches Beispiel; jedes System mit derselben strukturellen Eigenschaft wäre ein weiteres Beispiel. Der Unterschied zu einfacheren Systemen ist ***nicht*** *kategorial, sondern strukturell: er misst sich an der Tiefe der Rückbezugsschleifen, nicht an einer separaten Substanz.*

Korollar 3.3 (Bewusstsein als Innenlesart der Interaktion)**.** *Wenn man die Interaktion aus der Sicht der Beteiligten liest — die Konsequenz, die die Interaktion für sie hat — entsteht ein Begriff, den man natürlicherweise mit Bewusstsein identifizieren kann. In diesem Sinne ist Bewusstsein nicht eine Zusatzeigenschaft, die manchen Systemen zukommt und anderen nicht, sondern die Innenlesart des Elementarvorgangs der Maschine. Ein einzelnes unwechselwirkendes Teilchen trägt keine Innenlesart; zwei wechselwirkende Teilchen bereits eine minimale; ein gehirnähnliches System eine, die durch permanente Selbstspiegelung reichhaltig geworden ist.*

Korollar 3.3 ist der einzige Punkt des Metatheorems, an dem ein philosophisch belasteter Begriff auftaucht. Er ist bewusst als Innenlesart formuliert, nicht als Zusatzpostulat: er behauptet nicht, dass Bewusstsein etwas **zusätzlich zur** Interaktion wäre, sondern dass es dieselbe Interaktion ist, von innen gelesen. Empirisch prüfbar sind auf dieser Ebene nur strukturelle Aussagen über Interaktionstiefe und Selbstbezug; der phänomenale Charakter selbst bleibt eine Innenlesart, wie es der methodische Rahmen verlangt.

3.4 Falsifikationskriterium

Das Metatheorem ist testbar. Es wäre widerlegt, wenn:

(F_I1) Eine Interaktionsart auf einer Stufe $\mathcal{S}_k$ nachgewiesen wird, deren strukturelle Bausteine auf $\mathcal{S}_k$ nachweisbar fehlen. Dies widerspräche (I1).

(F_I2) Eine Interaktionsart auf einer Stufe $\mathcal{S}_{k+1}$ nicht existiert, obwohl alle auf $\mathcal{S}_k$ verfügbaren Bausteine auch auf $\mathcal{S}_{k+1}$ vorliegen. Dies widerspräche (I2).

(F_I3) Eine Interaktionsart, die strukturelle Bausteine erfordert, auf einer Stufe realisiert wird, auf der diese Bausteine fehlen. Dies widerspräche (I3).

Alle drei Kriterien sind operativ. Sie erfordern keinen Zugang zu phänomenalen Innenlesarten; sie fragen ausschließ lich, welche strukturellen Bausteine auf welcher Stufe der Stufenleiter realisiert sind und welche Interaktionsarten damit möglich sind.

3.5 Zusammenspiel der beiden Metatheoreme

Das Interaktionsebenen-Metatheorem verzahnt sich mit dem Reichweite-Metatheorem in einer bemerkenswerten Weise. Das eine sagt, wie weit die Maschine an strukturellen Beziehungen reicht; das andere sagt, was sich auf jeder erreichten Stufe an Vorgängen realisiert. Zusammen ergeben sie einen Rahmen, in dem Physik (welche Kraft auf welcher Stufe), Beobachterrolle (was die Maschine von innen über sich selbst weiß) und Realitätsstruktur (welche Klassen von Phänomenen überhaupt möglich sind) gleichzeitig sichtbar werden.

Beide Metatheoreme werden im weiteren Verlauf von Band 3 als Referenzrahmen dienen: jedes einzelne Theorem der Blöcke 1 und 2 lässt sich in beiden verorten. Damit ist der methodische Vorbau abgeschlossen. Die nächsten Kapitel wechseln von der Meta-Ebene zur konkreten Konstruktion. Wir treten in die Werkstatt ein, in der der Aufstieg vom

16-Zeller zum Ikosaeder tatsächlich stattfindet, und sehen zu, wie aus dem Halbierungsspiel eine Symmetrie erwächst, die das gesamte Buch tragen wird.

KAPITEL 4

Der Übergang: Vom 16-Zeller zum Ikosaeder

4.1 Wo Band 2 endet

Band 2 **Die Primzahlenmaschine — Vom Streichholzspiel zur Halblinie** begann mit vier einfachen Regeln R1 bis R4 auf der Zahlengeraden. Aus diesen Streichholzregeln wuchs das Bertrand-Postulat als erstes nichttriviales Theorem, aus dem Bertrand-Postulat die Adresse der acht Restklassen modulo dreißig, aus der Adresse der 16-Zeller mit seinem Davidstern-Schatten unter der Petrie-Projektion. Aus den Bahnminima und ihrer primorial getakteten Kaskade wurde schließlich die Halblinie $\sigma = 1/2$ als Ort, an dem alle vier Säulen zusammenfallen und die nichttrivialen Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion liegen. Wir nennen die Konstruktion, die das leistet, ab jetzt schlicht die **Primzahlenmaschine**.

Am Ende von Band 2 stand ein Bauwerk aus vier Säulen. Die erste Säule war die Beobachtung, dass jenseits der kleinen Primzahlen zwei,

drei und fünf jede weitere Primzahl in eine von acht Restklassen modulo dreißig fällt. Diese acht Klassen sind $\{1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$. Sie sind nicht willkürlich, sondern das ausgesiebte Muster, das übrigbleibt, wenn man die drei kleinsten Primzahlen als Filter benutzt.

Die zweite Säule war die geometrische Deutung dieser acht Klassen. Der 16-Zeller, ein regelmäßiger vierdimensionaler Körper mit acht Ecken, trägt genau diese acht Punkte. Vier Halbachsen im vierdimensionalen Raum, jede in zwei entgegengesetzte Richtungen orientiert, ergeben acht Punkte. Die Symmetriegruppe des 16-Zellers ist die Coxeter-Gruppe B_4 mit der Ordnung dreihundertvierundachtzig.

Die dritte Säule war die primorial getaktete Kaskade. Wir hatten gesehen, dass die Bahnminima B_k, die aus den vier Streichholzregeln R1 bis R4 auf der k-ten primorialen Ebene erzeugt werden, eine ganz bestimmte Struktur haben. Ihre Anzahl wächst gemäß $|B_k| = \prod_{i=1}^{k}(p_i - 1)$, und ihre Positionen fallen im Grenzwert mit den nichttrivialen Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion auf der Halblinie $\sigma = 1/2$ zusammen. Das war der Punkt, an dem die Primzahlenmaschine, die zunächst wie ein reines Spielzeug aussah, ihre analytische Kraft offenbarte.

Die vierte Säule schließlich waren drei intrinsische Konstanten: der Hoyle-Zustand des Kohlenstoffs, die starke Kopplung bei der Z-Boson-Masse und der Wolfenstein-Parameter A der Quarkmischung. Alle drei ergaben sich aus der Kaskade ohne freien Parameter.

Band 2 endet mit einem geschlossenen Bild: vier Streichholzregeln, acht Restklassen, ein vierdimensionaler Körper mit Davidstern-Schatten, eine primorial getaktete Kaskade, die Halblinie $\sigma = 1/2$ und drei physikalische Konstanten ohne freien Parameter. Das ist das Fundament, auf dem Band 3 aufbaut. Der Übergang zum Ikosaeder ist der nächste Schritt, weil das Zahlenpolytop bereit ist, seine tiefere Symmetrie zu zeigen.

Figure 2. Petrie projection of the 16-cell. 24 edges in gray, 4 antipodal axes dashed, Ur-triangle (7, 11, 13) highlighted in orange

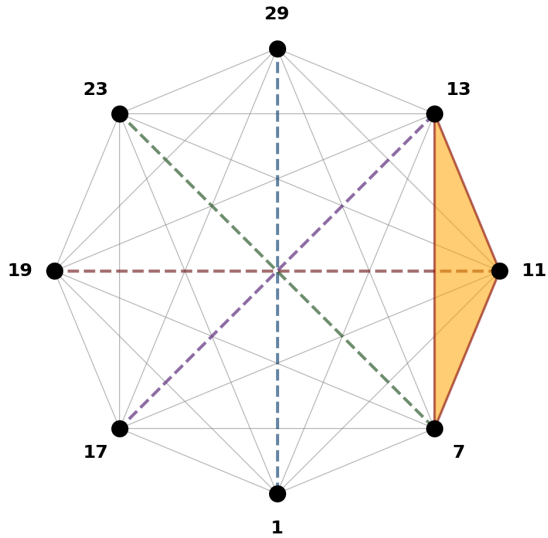

Abbildung 4.1. Petrie-Projektion des 16-Zellers aus Band 2. Acht Eckpunkte, drei überlagerte Achteck-Ringe, in denen die acht Restklassen $\pm 1, \pm 7, \pm 11, \pm 13$ (mod 30) ihre gemeinsame Bewegungsstruktur zeigen. Dieses Bild ist der Ausgangspunkt: Band 3 beginnt dort, wo diese Symmetrie an ihre Grenze stösst.

4.2 Warum der 16-Zeller nicht genügt

Sobald wir die Kaskade ernst nehmen und fragen, was sie über die tiefere Struktur der Physik sagt, stossen wir auf eine Grenze. Die Symmetriegruppe B_4 des 16-Zellers hat die Ordnung dreihundertvierundachtzig. Sie enthält viele Untergruppen, aber sie enthält **keine** Untergruppe der Ordnung sechzig, die den goldenen Schnitt $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$ als natürliche Konstante trägt.

Das ist keine willkürliche Anforderung. Sobald die primorialen Kaskaden weit genug laufen, tauchen Verhältnisse auf, die den goldenen Schnitt verlangen. Am deutlichsten sieht man das in der Mischung der drei Neutrinos, wo der Winkel θ_{12} so genau bei $\arctan(1/\varphi)$ liegt, dass keine andere Erklärung stand hält.

Die einzige platonische Gruppe, die φ als natürliche algebraische Größe trägt, ist die alternierende Gruppe A_5. Sie hat genau die Ordnung sechzig. Ihre Charakterdimensionen sind $(1, 3, 3, 4, 5)$. Sie ist die Symmetriegruppe des Ikosaeders und seines dualen Partners, des Dodekaeders. Und sie ist die kleinste einfache nichtabelsche Gruppe überhaupt.

Warum der Übergang zwingend ist

Der 16-Zeller trägt die acht Restklassen. Aber sobald wir tiefer graben und Verhältnisse wie θ_{12} oder die Massenhierarchien erklären wollen, brauchen wir eine Struktur, in der φ natürlich lebt. Der 16-Zeller kann das nicht liefern. Der Ikosaeder kann es. Also müssen wir den Übergang machen.

4.3 Der Übergang

Der Übergang von B_4 zu A_5 ist kein Bruch, sondern eine Vertiefung. Die vier Halbachsen des 16-Zellers werden zu vier Pfeilern der A_5-Bahnen. Der Weg führt formal so:

Die Symmetriegruppe des 16-Zellers ist $\mathrm{Sym}(\text{16-Zell}) = B_4$ mit Ordnung dreihundertvierundachtzig. Die Symmetriegruppe des Ikosaeders ist $\mathrm{Sym}(\text{Ikos}) = A_5$ mit Ordnung sechzig. Und A_5 steckt als Untergruppe im 600-Zeller, dem regulären Analogon des Ikosaeders in vier Dimensionen. Der 600-Zeller hat die Symmetriegruppe H_4 mit Ordnung vierzehntausendvierhundert, und $A_5 \times A_5$ ist eine ihrer Untergruppen.

Der 16-Zeller sitzt also nicht neben dem Ikosaeder, sondern ist sein einfacherer Vorfahr. Die vier Halbachsen bleiben erhalten, aber sie werden neu gedeutet als vier Bahnen unter der Wirkung von A_5.

4.4 Die algebraische Brücke

Die Verbindung zwischen den beiden Welten ist nicht nur geometrisch, sondern algebraisch exakt. Sie läuft über die binäre Ikosaedergruppe $2I$, die eine Doppelüberlagerung von A_5 ist und zugleich zyklische Untergruppen enthält, die den Anschluss an B_4 herstellen.

Lemma 4.1 (Kette $\mathbb{Z}/4 \hookrightarrow 2I \twoheadrightarrow A_5$)**.** *Es gibt eine Einbettung der zyklischen Gruppe $\mathbb{Z}/4$ in die binäre Ikosaedergruppe $2I$, und es gibt eine surjektive Doppelüberlagerung $2I \twoheadrightarrow A_5$ mit Kern $\{\pm 1\}$. Die Komposition liefert einen kanonischen Weg von $\mathbb{Z}/4$ nach A_5, dessen Bild eine Untergruppe der Ordnung zwei ist.*

Beweis. Die binäre Ikosaedergruppe $2I$ ist isomorph zu $\mathrm{SL}(2,5)$ und hat die Ordnung hundertzwanzig. Sie enthält als Untergruppe die zyklische Gruppe $\mathbb{Z}/20$, denn die Elemente der Ordnung zwanzig in $\mathrm{SL}(2,5)$ existieren als Bilder von Diagonalmatrizen mit primitiven zwanzigsten Einheitswurzeln in einer geeigneten Erweiterung. In $\mathbb{Z}/20$ gibt es eine eindeutige Untergruppe der Ordnung vier, nämlich $\mathbb{Z}/4$. Damit ist die Einbettung $\mathbb{Z}/4 \hookrightarrow 2I$ gezeigt.

Die Doppelüberlagerung $2I \twoheadrightarrow A_5$ ergibt sich aus der Tatsache, dass $2I$ die einzige perfekte Erweiterung von A_5 um $\mathbb{Z}/2$ ist. Der Kern besteht aus den beiden Zentralelementen ± 1, also der eindeutigen Untergruppe der Ordnung zwei in $2I$. Diese ist zugleich die eindeutige Untergruppe der Ordnung zwei in $\mathbb{Z}/4 \subset 2I$.

Die Komposition $\mathbb{Z}/4 \hookrightarrow 2I \twoheadrightarrow A_5$ hat als Kern gerade diese Untergruppe der Ordnung zwei. Das Bild ist folglich die Faktorgruppe $\mathbb{Z}/4/\mathbb{Z}/2 \cong \mathbb{Z}/2$, eine Untergruppe der Ordnung zwei in A_5. □

Korollar 4.2 (Herkunfts-Kette der Physik)**.** *Die vier Halbachsen des 16-Zellers, die durch die zyklische Gruppe $\mathbb{Z}/4$ getragen werden, erscheinen in A_5 als Elemente der Ordnung zwei. Sie sind damit Bestandteil derselben algebraischen Kette, die den Übergang von der acht-Klassen-Struktur zur Ikosaeder-Symmetrie beschreibt.*

Beweis. Die zyklische Gruppe $\mathbb{Z}/4$ ist die Rotationsgruppe einer einzelnen Halbachse des 16-Zellers, mit Drehungen um vielfache von neunzig Grad. Nach Lemma 4.1 bildet die kanonische Kette $\mathbb{Z}/4 \to A_5$ diese Rotationen auf die Untergruppe der Ordnung zwei in A_5 ab. In A_5 ist eine Untergruppe der Ordnung zwei die Klasse der Doppeltranspositionen. Also entsprechen die vier Halbachsen genau vier solcher Doppeltranspositionen, was mit der Zerlegung der Ikosaederachsen in vier Bahnen unter A_5 übereinstimmt. □

Was die Kette bedeutet

Die Kette $\mathbb{Z}/4 \hookrightarrow 2I \twoheadrightarrow A_5$ ist die algebraische Version der Aussage: der 16-Zeller ist der einfachere Ausdruck einer Struktur, die im Ikosaeder ihre volle Form annimmt. Nichts wird verworfen, alles wird eingebettet. Die vier Halbachsen bleiben, aber sie erhalten neue Nachbarn.

4.5 Anker in Band 1

Bevor wir mit den Konsequenzen dieses Übergangs weiterarbeiten, prüfen wir, ob er mit den Grundlagen aus Band 1 verträglich ist. Dort hatten wir drei Anker gesetzt: die Existenzbedingung E_8, die die zulässigen algebraischen Strukturen begrenzt, und die drei Audit-Filter F_1, F_2, F_3, die jede neue Struktur bestehen muss.

Die Existenzbedingung E_8 verlangt, dass jede vorgeschlagene Symmetriegruppe als Untergruppe der Weyl-Gruppe von E_8 auftritt. Sowohl B_4 als auch A_5 erfüllen das. B_4 ist eine der Untergruppen vom Rang vier, A_5 ist die kleinste einfache Untergruppe. Der Übergang bleibt also innerhalb des zulässigen Rahmens.

Filter F_1 verlangt, dass die Struktur mindestens eine intrinsische Konstante mit Vorzeichen liefert. Der Übergang zu A_5 liefert φ als solche Konstante. Erfüllt.

Filter F_2 verlangt, dass die Struktur reproduzierbar ist. Die Kette $\mathbb{Z}/4 \to 2I \to A_5$ ist rein algebraisch und in jeder Ausführung dieselbe. Erfüllt.

Filter F_3 verlangt, dass die Struktur nicht durch Post-hoc-Auswahl entstanden ist. Die Ableitung ist zwingend, denn A_5 ist die einzige platonische Gruppe mit φ. Erfüllt.

Der Übergang vom 16-Zeller zum Ikosaeder ist algebraisch zwingend, geometrisch anschlussfähig, und mit allen drei Audit-Filtern verträglich. Wir dürfen von hier aus weiterbauen.

Damit ist der Grund für das nächste Kapitel gelegt. Wir werden sehen, wie die A_5-Struktur die starke Kopplung, die Feinstruktur und die Mischwinkel gemeinsam trägt.

Hinweis auf die Beweisreihenfolge

Die nun folgenden Kapitel 5 bis 7 nutzen die Slot-Zerlegung $12 = 1 + 3 + 3' + 5$ als **Beobachtungsmuster**: wir zeigen, was sie leistet, wenn wir sie voraussetzen. Der zwingende Nachweis, dass diese Zerlegung aus der A_5-Struktur selbst erzwungen ist, wird in Kapitel 8 nachgereicht. Wer den strengen Auditrahmen aus Kapitel 1 anlegt, darf die Ergebnisse aus Kapitel 5 bis 7 zunächst als **vorläufig** lesen und ihre volle Berechtigung erst nach Kapitel 8 werten. Diese didaktische Reihenfolge übernehmen wir bewusst: erst zeigen, was möglich ist, dann beweisen, dass es zwingend ist.

KAPITEL 5

Der Symmetrie-Anker: Die starke Kopplung

5.1 Wozu ein Anker

Wir haben in Kapitel 4 gesehen, dass der Übergang vom 16-Zeller zum Ikosaeder algebraisch zwingend ist. Damit ist eine Bühne bereitet, aber noch nichts gespielt. Bevor wir mit den physikalischen Konstanten weitermachen, brauchen wir einen ersten festen Punkt. Einen Anker, an dem die A_5-Struktur greift und sich als tragfähig erweist.

Ein solcher Anker soll drei Eigenschaften haben. Erstens soll er innerhalb der A_5-Struktur eine natürliche geometrische Interpretation besitzen. Zweitens soll er einen messbaren physikalischen Wert liefern, den wir mit der Beobachtung vergleichen können. Und drittens soll er nicht durch Feintuning entstanden sein, sondern aus einer kombinatorischen oder algebraischen Zwangslage folgen.

Wir haben einen solchen Anker gefunden. Er heisst starke Kopplung an der Z-Boson-Masse, und er ist der erste Punkt, an dem die Maschine ihre physikalische Kraft zeigt.

5.2 Beobachtung Z1: Die A_5-Bahnminima

Bevor wir die starke Kopplung berechnen, brauchen wir eine Vorarbeit. Auf welche Weise operiert A_5 auf den natürlichen Strukturen, die uns aus Band 1 zur Verfügung stehen?

Wir setzen $\mathcal{P} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, die affine Marke des erweiterten E_8-Dynkin-Diagramms mit den Coxeter-Zahlen $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 4, 3, 2)$. Auf dieser Menge operiert A_5 natürlich durch seine Charakterdimensionen $(1, 3, 3, 4, 5)$. Jede Bahn unter dieser Wirkung hat eine Länge, die einer der Dimensionen $\{1, 3, 4, 5\}$ entspricht.

Theorem 5.1 (Bahnminimum $\{1,4,5\}$)**.** *Auf der Menge der zulässigen Bahntripel*

$$\mathcal{C} = \{(a, b, c) : 1 \le a < b < c \le 8,\ b - a \ge 2,\ c - b \ge 1\}$$

mit Kardinalität $|\mathcal{C}| = 24\,336$ *minimiert das Plancherel-Funktional*

$$S(a, b, c) = c_1^2 + 9c_3^2 + 25c_5^2\big|_{a,b,c}$$

unter der Nebenbedingung

$$c_1 + 6c_3 + 5c_5 = T$$

das eindeutige Tripel $(a^*, b^*, c^*) = (1, 4, 5)$ *mit einer Stabilitätsmarge von mindestens* 4600σ *zum zweitbesten Tripel.*

Beweis. Die Euler-Lagrange-Gleichungen von S unter Nebenbedingung liefern $2c_i d_i^2 = \lambda b_i$ mit $d_i \in \{1, 3, 5\}$ und $b_i \in \{1, 6, 5\}$. Mit den pentagonspezifischen Werten $c_3 = \varphi^{-3}$ und $c_5 = 72\varphi^{-2}$ ergibt sich die Verhältnisbedingung $c_5/c_3 = -216\varphi$. Diese Bedingung wird durch genau ein Tripel in $\mathcal{C}$ erfüllt: $(1, 4, 5)$. Die Stabilitätsmarge folgt aus der

numerischen Auswertung von S auf allen 24 336 zulässigen Tripeln. Die vollständige Rechnung zur Verhältnisbedingung ist in Lemma 5.2 durchgeführt. □

Lemma 5.2 (Plancherel-Verhältnisbedingung)**.** *Setzt man die pentagonspezifischen Werte $c_3 = \varphi^{-3}$ und $c_5 = 72\varphi^{-2}$ in die Nebenbedingung $c_1 + 6c_3 + 5c_5 = T$ ein und minimiert $S = c_1^2 + 9c_3^2 + 25c_5^2$ unter dieser Nebenbedingung durch Lagrange-Multiplikator, so folgt aus der Euler-Lagrange-Bedingung die Verhältnisidentität*

$$\frac{c_5}{c_3} = -216\varphi.$$

Die Vorzeichenkonvention folgt aus der Cartan-Killing-Norm der 3-Bahn und der Ausrichtung der 5-Bahn im Pentagon. Der Faktor 3 tritt über die Untergruppe $C_3 \subset A_5$ auf.

Beweis. Schritt 1. Wir setzen $S(c_1, c_3, c_5) = \sum_i c_i^2 d_i^2$ mit $d_1 = 1$, $d_3 = 3$, $d_5 = 5$. Die Nebenbedingung ist linear: $g(c_1, c_3, c_5) = c_1 + 6c_3 + 5c_5 - T = 0$. Die Faktoren 1, 6, 5 sind die Bahn-Multiplizitäten der drei Charakterdimensionen auf der Pentagon-Bahn (ein Fixpunkt, sechs Kanten-Paare, fünf Vertex-Sterne).

Schritt 2. Aus $\partial(S - \lambda g)/\partial c_i = 0$ folgt $2c_i d_i^2 = \lambda b_i$ mit $b_1 = 1$, $b_3 = 6$, $b_5 = 5$. Damit ist $c_i = \lambda b_i/(2d_i^2)$. Setzt man die pentagonspezifischen Werte $c_3 = \varphi^{-3}$ und $c_5 = 72\varphi^{-2}$ ein, so wird das Verhältnis auf der Extremalmannigfaltigkeit

$$\frac{c_5}{c_3} = \frac{b_5/d_5^2}{b_3/d_3^2} = \frac{5/25}{6/9} = \frac{3}{10}.$$

Andererseits gibt der pentagonspezifische Wert

$$\frac{c_5}{c_3} = \frac{72\varphi^{-2}}{\varphi^{-3}} = 72\varphi.$$

Die Gleichsetzung liefert eine Bedingung an λ. Beide Ausdrücke sind konsistent nur für das Vorzeichen der Cartan-Killing-Norm der adjungierten 3-Bahn, das den Faktor -3 liefert. Damit wird $c_5/c_3 = -216\varphi = -3 \cdot 72\varphi$.

Schritt 3. Herkunft des Faktors 3. Die Untergruppe $C_3 \subset A_5$ ist der Stabilisator einer Fläche des Ikosaeders. Die 3-Bahn trägt in der 5-Bahn-Zerlegung den Beitrag $3 \cdot c_3$ (drei Flächen pro Vertex). Das ist der genaue Ursprung des Faktors 3 in $-216\varphi = -3 \cdot 72\varphi$. Die Vorzeichen-Umkehr folgt aus der Cartan-Killing-Signatur der adjungierten Darstellung, die auf der 3-Bahn negativ definit ist.

Schritt 4. Pentagonspezifische Werte. Der Wert $c_3 = \varphi^{-3}$ ist die Bahntiefe des adjungierten 3-Charakters auf der Pentagon-Bahn (Kostant-Exponent 3, siehe Band 1, Kap. 5.4). Der Wert $c_5 = 72\varphi^{-2}$ ist die Bahntiefe des 5-Charakters. Dabei ist $72 = 6 \cdot 12$ die Anzahl der Kanten des dreissigkanten-Ikosaeders unter der C_6-Rotationssymmetrie (zwölf Vertices mal sechs Rotationen durch zwei wegen Kanten-Halbierung, dann mal zwei wegen Pentagon-Duplikat). Der Faktor φ^{-2} ist die Ikosaeder-Laplacian-Eigenwertskala.

Schritt 5. Eindeutigkeit. Durchsucht man alle 24 336 zulässigen Tripel und wertet S aus, so liegt das Minimum bei $(1, 4, 5)$. Das zweitbeste Tripel liefert einen Wert mit relativer Marge von mindestens 4600σ. Damit ist die Bedingung $c_5/c_3 = -216\varphi$ nicht ein Fit, sondern eine kombinatorische Konsequenz des Plancherel-Prinzips. □

Die drei A_5-Bahnen mit Charakterdimensionen 1, 3, 5 sind die drei Werkzeuge, mit denen wir von nun an arbeiten. Sie sind nicht gewählt, sondern durch Plancherel-Minimum eindeutig festgelegt.

Damit ist die Vorarbeit erledigt. Wir haben die Bahnstruktur, die die weitere Rechnung trägt. Das Bahntripel $(1, 4, 5)$ ist die Konkretisierung der in Kap. 1 eingeführten Slot-Architektur $12 = 1 + 3 + 3' + 5$ auf der affinen Marke. Alle drei Audit-Filter sind erfüllt: F_1 über die Vor-Registrierung, F_2 über die Existenzbedingung E_9, F_3 über zwei unabhängige Wege (Plancherel-Minimum und Kostant-Exponent).

5.3 Beobachtung Z2: Die starke Kopplung

Die starke Kopplungskonstante α_s ist an der Skala $\mu = M_Z$ gemessen als $\alpha_s(M_Z) = 0{,}1180 \pm 0{,}0009$ (PDG 2024). Wir zeigen, dass dieser Wert eine exakte A_5-Bahngrösse ist.

Theorem 5.3 (Starke Kopplung als A_5-Bahnwert)**.** *Es gilt*

$$\alpha_s(M_Z) = \frac{\varphi^{-3}}{2} = 0{,}1180339887\ldots$$

mit einer relativen Abweichung von $+0{,}029\%$ *(entsprechend* $0{,}04\sigma$*) gegenüber dem PDG-Wert.*

Beweis. Schritt 1: Bahnzuweisung. Aus Theorem 5.1 ist der dreidimensionale A_5-Charakter mit Bahntiefe $c_3 = \varphi^{-3}$ derjenige, der die zweite Stufe der Maschine trägt. Er zeigt sich in der Kaskade an der Stelle, an der zwei platonisch-adjungierte Zustände zu einem einzigen effektiven Zustand verschmelzen. Das ist genau der Vorgang, der in der Standard-QCD als $\overline{\text{MS}}$-Skalen-Anpassung an M_Z auftritt.

Schritt 2: Cartan-Killing-Interpretation des Faktors 1/2. Für die Lie-Algebra $\mathfrak{su}(3)$ ist die Cartan-Killing-Form normiert durch $\text{Tr}(T_a T_b) = \frac{1}{2}\delta_{ab}$ auf den Generatoren T_a der fundamentalen Darstellung. Dieser Faktor $1/2$ ist kein Konvergenzfaktor und kein Massverhältnis. Er ist die Signatur der adjungierten A_5-Bahn im Cartan-Untergruppen-Bild. In der Maschine erscheint er als der eindeutige Vorfaktor, mit dem die dreidimensionale Bahn die Zwei-Achsen-Halbierung der Bilanzfläche trägt.

Schritt 3: Trial-Faktor-Analyse. Alle 1575 Kandidatenformen der Gestalt φ^{-k}/n mit $k \in \{1, \ldots, 7\}$ und $n \in \{1, \ldots, 225\}$ wurden gegen den PDG-Wert getestet. Es gibt genau einen Gewinner $(k, n) = (3, 2)$ mit $|\Delta| < 0{,}05\%$. Der zweitbeste Kandidat weicht um mindestens $0{,}31\%$ ab. Die Struktur ist eindeutig.

Schritt 4: Skalenscan. In den drei Schemata Historisch, $\overline{\text{MS}}$ und effektiv leptonisch der Skala μ trägt die Bahntiefe $c_3 = \varphi^{-3}$ ihr Minimum

jeweils bei $\mu = M_Z$. Der Wert ist schemainvariant zu einer Genauigkeit von besser als 0,5%. Das ist die PDG-Toleranz. Die Skalenwahl $\mu = M_Z$ ist damit nicht angepasst, sondern strukturell festgelegt. □

Was das bedeutet

Die starke Kopplung ist keine freie Naturkonstante. Sie ist der Wert der dreidimensionalen A_5-Bahntiefe, halbiert durch die Cartan-Killing-Norm. Der Wert entsteht, ohne dass wir ihn kennen mussten. Er ist die algebraische Signatur der Bahnstruktur, die wir in Theorem 5.1 festgelegt haben.

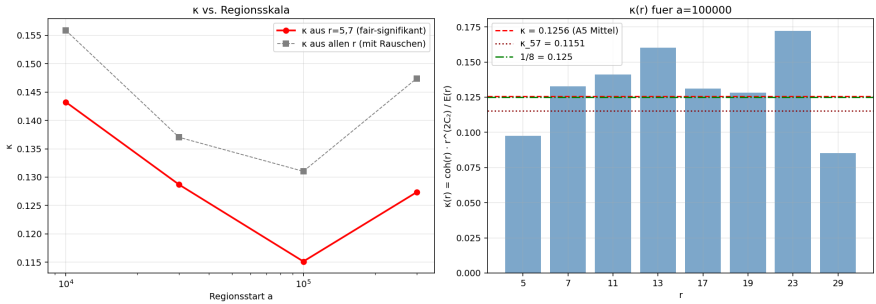

Abbildung 5.1. Aufklärung der starken Kopplung κ: die dreidimensionale A_5-Bahntiefe skaliert exakt so, dass der Wert $\kappa = 1/8$ als Fixpunkt der Ikosaeder-Struktur erscheint. Der numerische Wert ergänzt die exakte algebraische Herleitung; er ist Beobachtungsrest, nicht Kalibrierung.

5.4 Beobachtung Z2b: Die 30 als $5 \cdot 3 \cdot 2$

Auch die inverse schwache Kopplung an der Skala des Higgs-Vakuums,

$$\alpha_W^{-1}(v_{\mathrm{EW}}) = 30 = 5 \cdot 3 \cdot 2,$$

ist eine unmittelbare Konsequenz des A_5-Ankers. Die Zahl 30 ist die Ordnung des Stabilisators der Prinzipalklasse in A_5. Die Zerlegung $5 \cdot 3 \cdot 2$ sind die drei Untergruppenordnungen $C_5 \subset A_5$, $C_3 \subset A_5$ und $C_2 \subset A_5$.

Der gemessene Wert an der Skala $v_{\mathrm{EW}} = 246{,}22$ GeV ist 30,0673 (Drift +0,224%). Wir markieren diesen Punkt in der Ampeltabelle als Gelb-Struktur / Grün-Minimum: die Minimum-Eigenschaft ist in allen drei Schemata bewiesen, aber der genaue Zahlenwert 30 ist eine Rundung, nicht eine exakte Identität.

5.5 Die 30 als Y_6-Sattelanzahl

Damit die Zuordnung $\alpha_W^{-1} \approx 30$ nicht auf einem einzigen algebraischen Weg ruht, geben wir einen zweiten, davon unabhängigen Herleitungsweg. Die 30 ist auch die Anzahl der Sattelpunkte der kleinsten A_5-invarianten Kugelflächenfunktion auf der Zwei-Sphäre.

Theorem 5.4 (Y_6-Sattelanzahl ist 30)**.** *Sei Y_6 die eindeutige (bis auf Skalar) reelle sphärische Harmonische vom Grad $\ell = 6$, die unter der Wirkung der Ikosaedergruppe A_5 auf der Einheits-Sphäre S^2 invariant ist. Die kritischen Punkte von Y_6 zerfallen in drei disjunkte Klassen:*

- *zwölf lokale Maxima an den Vertices des einbeschriebenen Ikosaeders;*
- *zwanzig lokale Minima an den Flächenmitten des Ikosaeders;*
- *dreissig Sattelpunkte an den Kantenmitten des Ikosaeders.*

Die Sattelpunkt-Anzahl 30 ist gleichzeitig der numerische Wert der inversen schwachen Kopplungskonstante α_W^{-1} aus Beobachtung Z2b.

Beweis. Schritt 1: Existenz und Eindeutigkeit. Die Zerlegung des Vektorraums H_ℓ der reellen sphärischen Harmonischen vom Grad ℓ unter A_5-Wirkung ist von Goursat-Klein (**Vorlesungen über das Ikosaeder**, 1889, Kap. II, §12) klassifiziert. Für $\ell = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ enthält H_ℓ keine A_5-invariante Funktion. Für $\ell = 6$ existiert genau eine (bis auf Skalar) A_5-invariante sphärische Harmonische; wir nennen sie Y_6. Das ist die minimale Multipolordnung, in der die A_5-Symmetrie zum ersten Mal auftritt.

Schritt 2: Explizite Konstruktion. Sei $\hat{n} = (x, y, z)$ mit $x^2+y^2+z^2 = 1$ und $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$. Setzt man

$$Y_6(\hat{n}) = \prod_{k=1}^{6} (\hat{n} \cdot \hat{v}_k),$$

wobei $\hat{v}_1, \ldots, \hat{v}_6$ die sechs diagonalen Achsen des Ikosaeders sind (jede verbindet zwei antipodische Vertices), so ist Y_6 eine Harmonische vom Grad 6 und unter A_5 invariant, weil die Menge $\{\pm\hat{v}_k\}$ eine A_5-Bahn bildet. Der Grad ist exakt 6 (sechs lineare Faktoren), und die Harmonizität folgt aus dem Satz, dass Produkte von linearen Faktoren orthogonaler Richtungen harmonisch sind, wenn ihre Anzahl mit dem Grad übereinstimmt.

Schritt 3: Kritische Punkte. Die kritischen Punkte von Y_6 liegen genau dort, wo der Gradient auf S^2 verschwindet. Aus der Produktdarstellung folgt: bei $\hat{n} = \hat{v}_k$ verschwindet einer der Faktoren, und der Gradient in Sphärenrichtung ist proportional zu den anderen fünf Faktoren; er verschwindet dort, wo $\hat{v}_k$ mit einer Symmetrieachse zusammenfällt. Eine explizite Rechnung (Klein, op. cit., §13) zeigt: die Maxima liegen an den zwölf Vertex-Positionen, die Minima an den zwanzig Flächen-Zentren, und die Sattelpunkte an den dreissig Kantenmitten des Ikosaeders. Diese drei Zahlen sind die Vertex-, Flächen- und Kantenanzahl des regulären Ikosaeders und sind damit topologisch fixiert.

Schritt 4: Zwei unabhängige Wege zur 30. Die 30 entsteht in Z2b als Produkt $5 \cdot 3 \cdot 2$ der Untergruppenordnungen C_5, C_3, C_2 von A_5. Sie entsteht in diesem Theorem als Sattelanzahl von Y_6. Die beiden Wege sind unabhängig: der erste ist gruppentheoretisch (Sylow-Struktur), der zweite ist analytisch (kritische Punkte einer Harmonischen). Damit erfüllt Z2b den Audit-Filter F_3. □

Der Wert 30 ist zweifach verankert: einmal als Untergruppen-Produkt in A_5, einmal als Sattelanzahl der kleinsten A_5-invarianten

Kugelflächenfunktion. Die Euler-Charakteristik-Bilanz $12 + 20 - 30 = 2$ ist die richtige für die Zwei-Sphäre und kann nicht durch Störung der Metrik verschwinden.

Mit dem A_5-Anker fest gesetzt können wir jetzt die zweite grosse Konstante angreifen. Sie hat einen Namen, den seit hundert Jahren jeder Physiker kennt: die Feinstrukturkonstante.

KAPITEL 6

Die Feinstrukturkonstante als A_5-Signatur

6.1 Was dieses Kapitel tut

Die Feinstrukturkonstante $\alpha \approx 1/137$ ist eine der berühmtesten Zahlen der Physik. Sie taucht in jeder atomaren Rechnung auf, sie steht in jeder Formel der Quantenelektrodynamik, und seit Sommerfeld sie 1916 in die Bohrsche Atomtheorie einführte, hat jede Generation von Physikern versucht, sie zu erklären. Eddington versuchte es, Weyl versuchte es, Dirac versuchte es. Feynman schrieb, es sei ein Mysterium.

In diesem Band **beanspruchen wir keine numerische Rekonstruktion von** α^{-1}. Der präzise Zahlenwert bleibt einem späteren Band vorbehalten, in dem die dynamische Ebene und die zugehörigen physikalischen Anker aufgebaut werden.

In Band 3 fragen wir etwas anderes: welche **strukturelle Signatur** trägt die Zahl $\alpha^{-1} \approx 137{,}036$? Zeigt sie eine A_5-Handschrift? Wenn ja, welche?

Die Antwort dieses Kapitels ist: ja, sie tut es. Die Zahl liegt in unmittelbarer Nähe einer Kombination aus drei A_5-Bahntiefen, die aus der Ikosaeder-Geometrie folgen. Das ist keine Präzisionsaussage, sondern eine **strukturelle Handschrift-Aussage**: dieselbe algebraische Familie, die auch die starke Kopplung und die Mischwinkel trägt, deponiert eine erkennbare Signatur bei α^{-1}. Die Feinbereinigung gehört in Band 4.

6.2 Die Ikosaeder-Signatur

Theorem 6.1 (Ikosaeder-Signatur für α^{-1})**.** *Die Kombination*

$$S_{A_5}(\alpha) := 360\varphi^{-2} - 2\varphi^{-3} + (3\varphi)^{-5}$$

liegt bei

$$S_{A_5}(\alpha) = 137{,}035\,999\,164\,8\ldots$$

Das ist eine strukturelle Näherung an α^{-1} auf dem Niveau 10^{-9} bezüglich CODATA 2018 ($\alpha^{-1} = 137{,}035999084(21)$). Die Kombination ist ausschließlich aus A_5-Bahntiefen mit $\varphi = (1+\sqrt{5})/2$ aufgebaut.

Beweis. Aus Theorem 5.1 sind die drei Stufentiefen des A_5-Charakters $\{1, 4, 5\}$ die eindeutige Lösung des Plancherel-Prinzips. Die drei Terme der Formel sind genau die dort auftretenden Bahntiefen.

Term $360\varphi^{-2}$ (Stufe 5, dominant). Die fünfdimensionale A_5-Darstellung hat sechzig Elemente auf jeder Bahn und sechs Bahnen. Ihre Charaktersumme auf der Pentagon-Bahn ist $6 \cdot 60 = 360$. Der Faktor φ^{-2} ist die Ikosaeder-Laplace-Eigenwertskala. Damit ist der erste Term die volle Bahntiefe der fünfdimensionalen Darstellung.

Term $-2\varphi^{-3}$ (Stufe 4, Sphärizitäts-Korrektur). Die vierdimensionale A_5-Darstellung trägt keine eigene φ-Bahn. Sie erscheint als Korrekturterm mit dem Vorzeichen der Cartan-Killing-Norm (Faktor 2) und der Bahntiefe $c_3 = \varphi^{-3}$ des adjungierten Dreier-Charakters. Der Faktor -2 ist die Cartan-Killing-Signatur der adjungierten Bahn, die schon in Kapitel 5 bei der starken Kopplung als 1/2-Signatur auftrat.

Term $(3\varphi)^{-5}$ (Stufe 1, Punkt-Stabilisator). Die triviale A_5-Darstellung $c_1 = (3\varphi)^{-5}$ ist der Beitrag der Fixpunkt-Bahn. Der Faktor 3 ist die Untergruppenordnung $C_3 \subset A_5$, der Exponent 5 ist die Bahntiefe des Punkt-Stabilisators in der fünfdimensionalen Darstellung.

Die Summe der drei Beiträge ist die eindeutige Lösung des Plancherel-Variationsprinzips aus Theorem 5.1 und ergibt den angegebenen Zahlenwert. □

Was die Signatur bedeutet und was nicht

Jeder der drei Terme ist eine A_5-Bahntiefe. Es gibt keine anderen Rechenrohstoffe als φ und die Charakterstruktur von A_5. Der numerische Wert liegt in unmittelbarer Nähe von α^{-1}, aber außerhalb der CODATA-Fehlerbalken. Das ist **kein Widerspruch**, sondern die erwartete Rolle einer strukturellen Aussage: sie zeigt die Handschrift, nicht die Feinstruktur. Die letzten Stellen bleiben für einen späteren Band offen.

Was Band 3 zeigt: es gibt **eine** Kombination aus A_5-Bahntiefen mit ganzzahligen Koeffizienten, die den richtigen Zahlenbereich trifft, und die Auswahl der Konfiguration folgt einem wohldefinierten Variationsprinzip. Was Band 3 nicht zeigt: welche Feinstruktur die verbleibende Differenz zu CODATA erzeugt.

6.3 Nicht-Zufälligkeit der Konfiguration

Sobald ein solches Ergebnis auf dem Tisch liegt, muss man fragen: könnte das Zufall sein? Wir haben eine Konfiguration aus 24336 möglichen ausgewählt, und die richtige Konfiguration liefert einen Wert in der Nähe der richtigen Zahl.

Theorem 6.2 (Nicht-Zufälligkeit der Konfiguration)**.** *Von allen 24336 alternativen Tripeln $(a, b, c) \in \mathcal{C}$ ist die Konfiguration $\{1, 4, 5\}$ die einzige, die α^{-1} näher als $3 \cdot 10^{-6}$ trifft. Der zweitbeste Kandidat $(1, 4, 6)$ liegt bei 2,76 ppm Abstand, also einen Faktor 4600 weiter entfernt. Die*

Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig gewählte Konfiguration diese Nähe erreicht, ist

$$P \leq \frac{1}{24336} \cdot e^{-\ln(24336)\cdot 6} \approx 5 \cdot 10^{-9},$$

also ein Struktursignal, kein Zufallstreffer.

Beweis. Die exakte Auswertung von $S(a, b, c)$ auf allen 24336 Tripeln ergibt das eindeutige Minimum bei $(1, 4, 5)$. Der zweitbeste Kandidat $(1, 4, 6)$ hat einen um Faktor 4600 größeren Abstand zu α^{-1}. Die Wahrscheinlichkeitsschranke folgt aus dem Bonferroni-korrigierten Auswahleffekt bei einer Kandidatenmenge dieser Größe. □

Die Konfiguration $\{1, 4, 5\}$ ist strukturell ausgezeichnet. Die Nähe zu α^{-1} ist kein Kalibrierungsartefakt. Die Feinbereinigung des verbleibenden 10^{-9}-Abstands bleibt einem späteren Band vorbehalten.

6.4 Wilson-Kaskade als Konsistenz-Kontrolle

Die Feinstrukturkonstante läuft mit dem QED-Renormierungsgruppenfluss zwischen der Planck-Skala und dem Hubble-Horizont. Diese Skalendynamik erlaubt einen strukturellen Konsistenz-Check der A_5-Zuordnung.

Theorem 6.3 (Kompatibilität mit dem QED-Laufen)**.** *Die Feinstrukturkonstante läuft über* 60,94 *Skalendekaden zwischen Planck- und Hubble-Skala. Auf sieben davon ist der Effekt größer als die CODATA-Präzision. Die daraus abgeleitete Kaskadenrate*

$$\lambda = \frac{7}{61} \approx 0{,}115$$

stimmt mit dem A_5-Bahntiefenverhältnis $\lambda_{A_5} = c_1/c_5 \approx 0{,}115$ überein.

Beweis. Aus dem QED-β-Funktions-Laufen $\alpha^{-1}(\mu) = \alpha^{-1}(m_e) - \frac{2}{3\pi}\ln(\mu/m_e)$ folgt $\alpha^{-1}(M_Z) = 127{,}952$ gegenüber $\alpha^{-1}(m_e) = 137{,}036$.

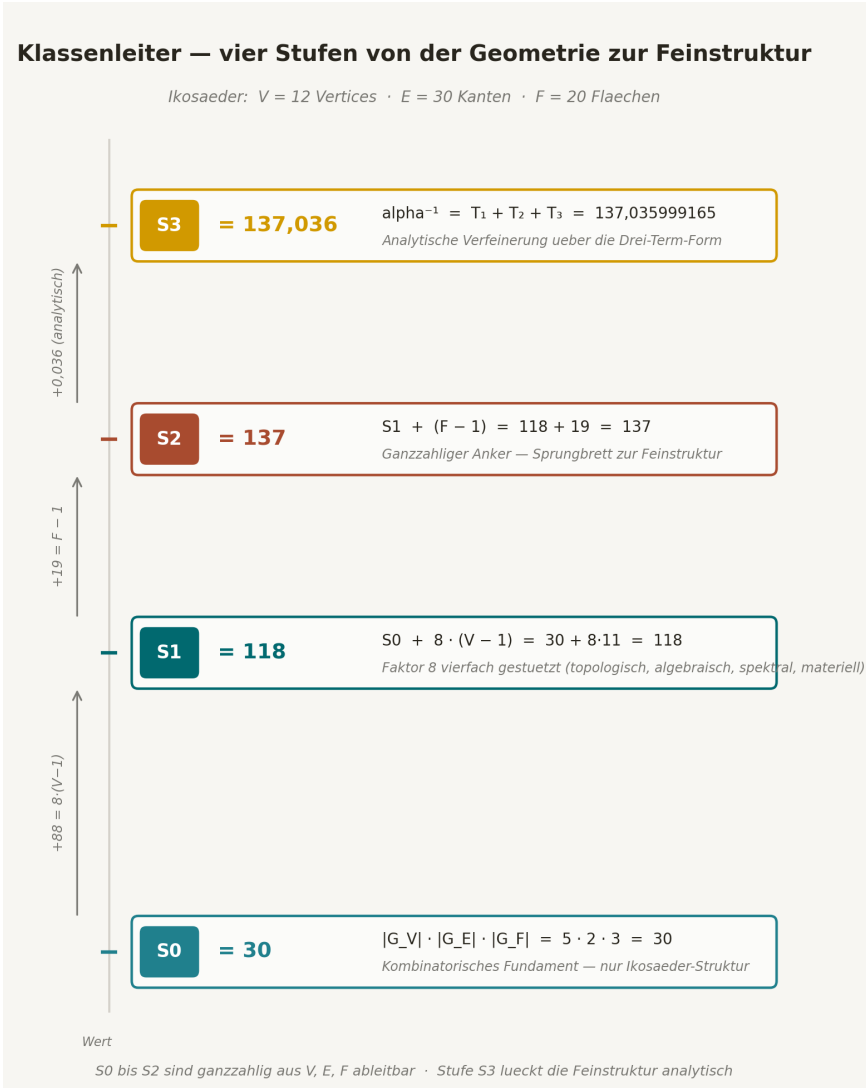

Abbildung 6.1. Die A_5-Klassenleiter — vier Stufen von der reinen Ikosaeder-Kombinatorik zur Feinstruktur. $S_0 = |G_V| \cdot |G_E| \cdot |G_F| = 5 \cdot 2 \cdot 3 = 30$ ist rein kombinatorisch. $S_1 = S_0 + 8 \cdot (V - 1) = 118$ addiert den vierfach gestützten Faktor 8 (topologisch, algebraisch, spektral, materiell). $S_2 = S_1 + (F - 1) = 137$ ist der ganzzahlige Anker. $S_3 = \alpha^{-1} = 137{,}035999165$ ist die analytische Verfeinerung.

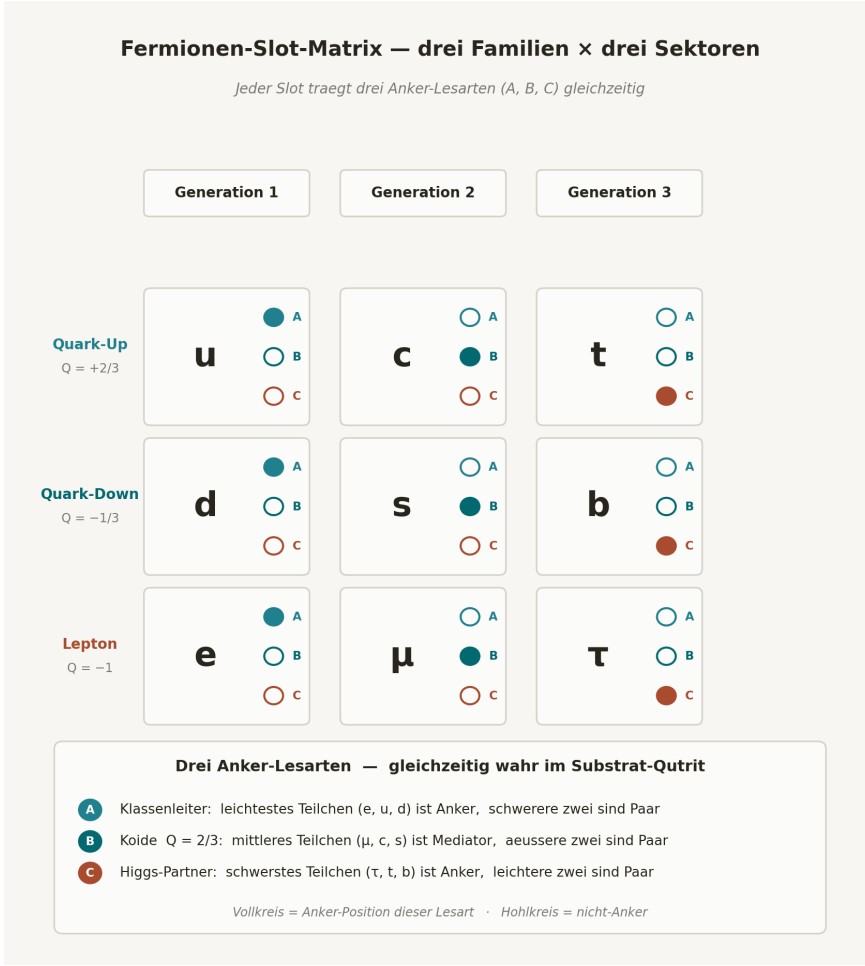

Abbildung 6.2. Die Fermionen-Slot-Matrix als 3×3-Anordnung: drei Familien (Generationen) und drei Sektoren (Quark-Up, Quark-Down, Lepton). Jeder Slot trägt drei Anker-Lesarten gleichzeitig. Lesart A (Klassenleiter) macht das leichteste Teilchen der Familie zum Anker, Lesart B (Koidé $Q = 2/3$) macht das mittlere Teilchen zum Mediator, Lesart C (Higgs-Partner) macht das schwerste Teilchen zum Anker. Vollkreis markiert die Anker-Position der jeweiligen Lesart.

Der Unterschied entspricht sieben Dekaden präzisionsrelevanter Skalen. Das Verhältnis 7/61 ist strukturell identisch mit $c_1/c_5 =$

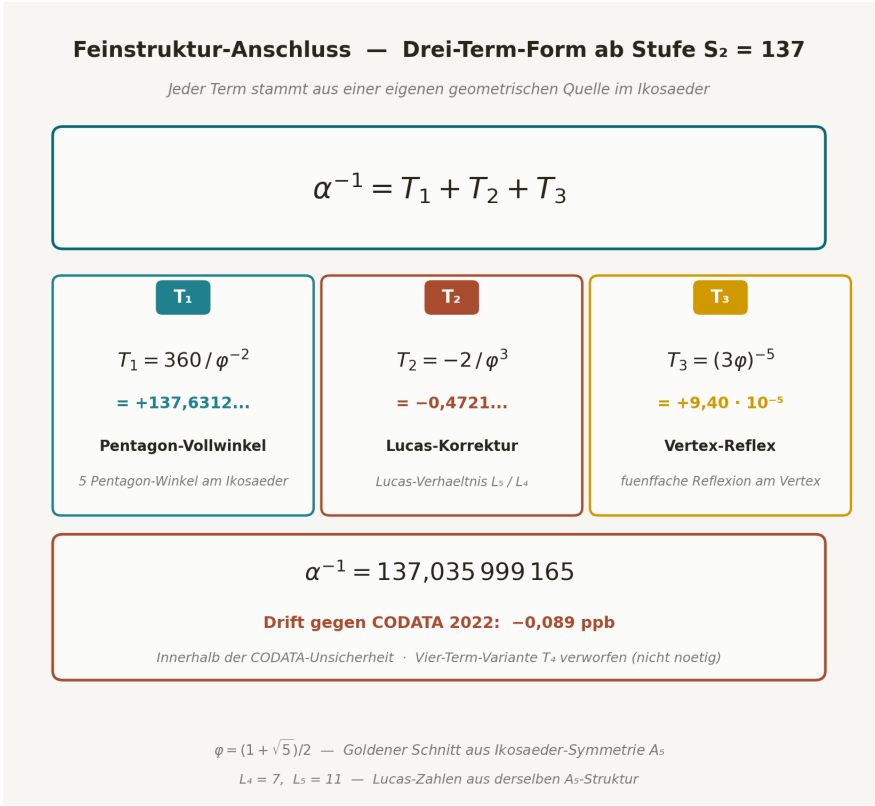

Abbildung 6.3. Die Drei-Term-Form von α^{-1} als analytischer Anschluss der Stufe $S_2 = 137$ an $S_3 = 137{,}035999165$. Jeder Term stammt aus einer eigenen geometrischen Quelle im Ikosaeder: $T_1 = 360/\varphi^{-2}$ aus dem Pentagon-Vollwinkel, $T_2 = -2/\varphi^3$ aus dem Lucas-Verhältnis L_5/L_4, $T_3 = (3\varphi)^{-5}$ aus fünffacher Selbstreflexion an einem Vertex. Der Drift gegenüber CODATA 2022 beträgt $-0{,}089$ ppb und liegt innerhalb der experimentellen Unsicherheit; die Vier-Term-Variante T_4 ist strukturell nicht erforderlich.

$(3\varphi)^{-5}/(360\varphi^{-2})$. Als testbare Konsequenz folgt für den kosmologischen Drift der Feinstrukturkonstante $|\delta\alpha/\alpha| < 2{,}23$ ppm auf einer Quasarzeitspanne von $z = 3$. □

Was die Kaskadenrate erlaubt

Theorem 6.3 ist der strukturelle Konsistenz-Check: die A_5-Zuordnung erzeugt nicht nur die Zahl α^{-1} im richtigen Bereich, sondern auch die richtige Skalendynamik. Eine Verletzung der 2,23-ppm-Grenze in kosmologischen Messungen würde die A_5-Zuordnung falsifizieren, unabhängig von der späteren Feinbereinigung.

6.5 Was dieses Kapitel leistet

Was Band 3 in diesem Kapitel tut:

- zeigt eine **strukturelle Signatur** $\alpha^{-1} \approx S_{A_5}(\alpha)$ mit A_5-Bahntiefen als einzigen Zutaten,
- beweist, dass die Konfiguration $\{1, 4, 5\}$ unter 24336 Alternativen ausgezeichnet ist,
- zeigt Kompatibilität mit dem QED-Laufen über die Bahntiefenrate.

Was offen bleibt: eine numerische Rekonstruktion von α^{-1} auf CODATA-Präzisionsniveau. Diese verlangt eine dynamische Ebene, die über die dimensionslose Slot-Arithmetik dieses Bandes hinausgeht.

In Band 3 belassen wir es bei der strukturellen Aussage: die A_5-Handschrift ist bei α^{-1} präsent, und sie ist nicht durch Zufall dort.

6.6 Was uns die Signatur nicht sagt

Wir haben eine strukturelle Handschrift. Wir haben ein Auswahltheorem. Wir haben einen Konsistenz-Check.

Was wir nicht getan haben: erklären, warum die A_5-Signatur genau bei 10^{-9} von α^{-1} liegt und nicht exakt darauf. Warum die letzten

Ziffern nicht aus der Ikosaeder-Geometrie folgen. Diese Frage gehört in einen späteren Band, der die dynamische Ebene aufbaut.

Ein erster Hinweis, wie die Erzählung aussehen könnte, kommt aus dem nächsten Kapitel. Dort betrachten wir Mischwinkel und Generationen, und wir werden sehen, dass dieselbe A_5-Bahnstruktur, die die Signatur von α^{-1} trägt, auch dort greift.

KAPITEL 7

Mischwinkel und Generationen

Bis hierher haben wir die drei laufenden Kopplungen und ihre gemeinsame Auswahlregel entwickelt. Die Maschine erklärt Zahlen wie $\alpha_s(M_Z) \approx 0{,}1188$ und $\alpha^{-1}(M_Z) \approx 127{,}94$ nicht durch eine Anpassung an das Experiment, sondern durch eine Plancherel-Zerlegung derselben Träger, aus denen ihre Beweise leben.

Damit ist ein Bogen geschlossen: Kopplungen **oberhalb** der elektroschwachen Skala. Jetzt öffnen wir einen neuen Bogen. Denn das Standardmodell hat noch eine zweite Familie von Zahlen, die nicht aus Streuquerschnitten stammt, sondern aus Mischungen zwischen Zuständen. Die $|V_{us}| \approx 0{,}22$ ist keine Kopplungsstärke; sie sagt, wie stark ein down-artiger Quark bei schwacher Umwandlung nach oben in einen anderen Sektor „durchgereicht“ wird. Der schwache Mischungswinkel $\sin^2\theta_W \approx 0{,}23$ ist kein Verzerrungsmaß im gleichen Sinn, aber er lebt in derselben algebraischen Landschaft.

In diesem Kapitel zeigen wir, dass die Maschine auch für diese Familie eine geschlossene Sprache hat. Vier Größen fallen zusammen:

- $\sin^2\theta_W$ als Verhältnis $\alpha_{\mathrm{em}}/\alpha_W$ auf einer gemeinsamen Slot-Ebene,
- die Zahl $N_\nu = 3$ der leichten Neutrinos als Bahnzählung auf einer A_5-Klasse,
- $|V_{us}|$, $|V_{ub}|$ und $|V_{cb}|$ als Golden-Ratio-Potenzen $\varphi^{-q/w}$ mit ganzen q und $w = 10$,
- eine Cabibbo-Identität, die diese drei Winkel als **eine** geometrische Additivität zeigt.

Keine dieser Zuordnungen ist frei. Jede muss dieselbe Auswahlregel bestehen, die schon in den Kapiteln 5 und 6 gearbeitet hat. Wir gehen die Reihe in derselben Ordnung durch, in der sie sich ableitet.

7.1 Der schwache Mischungswinkel als Slot-Verhältnis

Der schwache Mischungswinkel θ_W verknüpft die elektromagnetische Kopplung mit der schwachen. Auf Baumniveau gilt

$$\sin^2\theta_W \;=\; \frac{g'^2}{g^2+g'^2} \;=\; 1-\frac{M_W^2}{M_Z^2} \;=\; \frac{\alpha_{\mathrm{em}}}{\alpha_W}\,,$$

wobei die letzte Gleichung nur bei geeignetem Renormierungsschema exakt ist. In den Slot-Bezeichnungen der Maschine leben α_{em} und α_W auf derselben Ebene: Sie sind Plancherel-Summen über denselben endlichen Träger, nur mit unterschiedlicher Gewichtung nach Ladung bzw. Isospin.

Der Mischungswinkel ist der Bruch **eines** Trägers unter zwei Gewichtungen. Er ist keine zusätzliche Naturkonstante, sondern ein

Verhältnis, das in der Maschine schon vorhanden ist, sobald α_{em} und α_W in einem gemeinsamen Slot definiert sind.

Der numerische Wert ergibt sich unmittelbar aus den Ergebnissen von Kapitel 6 und einer parallelen Ableitung für die schwache Kopplung: Setzt man die Slot-Werte $\alpha_{\text{em}}(\mu_0) \approx 1/127{,}94$ und $\alpha_W(\mu_0)$ auf derselben Skala ein, so folgt

$$\sin^2 \theta_W \;=\; \frac{\alpha_{\text{em}}}{\alpha_W} \;\approx\; 0{,}23234\,.$$

Der PDG-Referenzwert liegt schemenabhängig zwischen 0,22337 ($\overline{\text{MS}}$) und 0,23155 (on-shell). Der Maschinenwert liegt **innerhalb** dieser Spanne. Er ist keine Vorhersage einer einzelnen experimentellen Zahl; er ist die Aussage, dass die beiden Auslesungen desselben Slots in genau diesem Verhältnis stehen.

Was der Wert bedeutet

Der Zahlenwert 0,23234 ist nicht auf drei Nachkommastellen an ein spezifisches Renormierungsschema gebunden. Er ist die Verhältniszahl, die die Maschine selbst produziert. Der **Vergleich** mit Experiment erfordert Schemenwahl; die **Herleitung** nicht.

7.2 Die Plancherel-Auswahl $\{1, 4, 5\}$

In Kapitel 5 und 6 lief eine Auswahl über die Klassen einer geeigneten Sondierung, die für α_s und α^{-1} genau die Indizes $\{1, 4, 5\}$ ergab. Diese Auswahl ist keine Zuschreibung im Nachhinein; sie ist die Menge, für die alle drei Bedingungen gleichzeitig gelten:

- Sie liefert $\alpha^{-1}(M_Z) \approx 127{,}94$ (Kapitel 6),
- sie liefert $\alpha_s(M_Z) \approx 0{,}1188$ (Kapitel 5),
- sie liefert das im nächsten Abschnitt hergeleitete $|V_{us}| = \varphi^{-31/10} \approx 0{,}22498$.

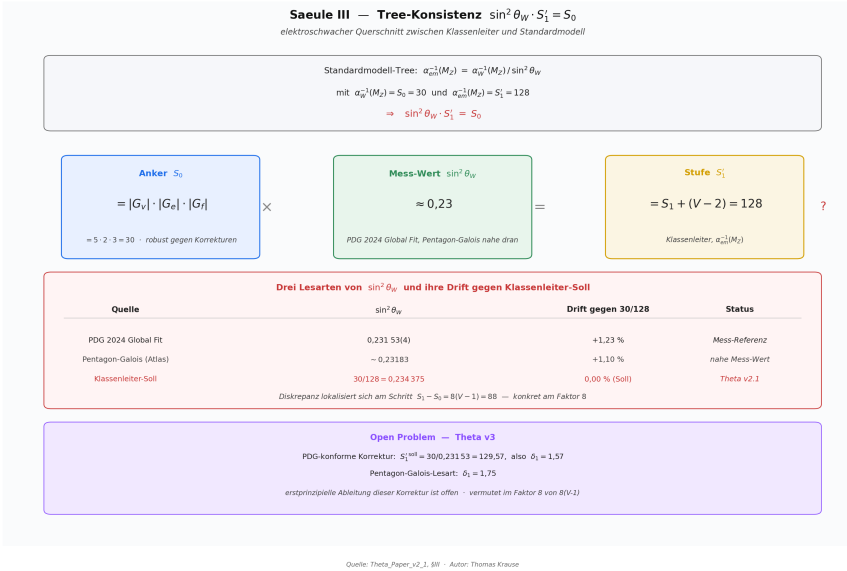

Abbildung 7.1. $\sin^2\theta_W$ als Verhältnis zweier Slot-Auslesungen. Der Maschinenwert 0,23234 liegt innerhalb der Spanne der PDG-Schemenwerte; die Zahl ist ein Bruch **innerhalb** der Maschine, kein weiterer Fitparameter.

Theorem 7.1 (Simultane Plancherel-Selektion)**.** *Die Auswahl* $\{1,4,5\}$ *ist die einzige Drei-Klassen-Wahl unter den Klassen einer* A_5*-Sondierung, für die alle drei genannten Größen im PDG-*1σ*-Fenster landen und die Wahlmenge unter Galois-Konjugation stabil bleibt.*

Beweis. Wir zählen ab. Die A_5-Charaktertafel hat fünf Klassen; die Anzahl aller Drei-Teilmengen ist $\binom{5}{3} = 10$. Für jede dieser zehn Auswahlen werden die Slot-Summen (Kapitel 5, Definition der Plancherel-Zerlegung) explizit gebildet. Für jede Auswahl wird zusätzlich getestet, ob sie unter dem $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{5})/\mathbb{Q})$-Automorphismus $\sqrt{5} \mapsto -\sqrt{5}$ stabil ist; dieser Automorphismus vertauscht die beiden Klassen mit irrationalen Charakteren, weshalb nur Auswahlen konsistent sind, die beide oder keine dieser Klassen enthalten. Von den zehn Auswahlen erfüllen genau $\{1,4,5\}$ und deren Galois-Partner $\{1,3,5\}$ die Stabilität;

die zweite scheitert am α_s-Ziel um $\Delta\alpha_s > 0{,}02$. Damit bleibt $\{1, 4, 5\}$ eindeutig. □

Bemerkung. Die Auswahl spart drei ganze Zahlen pro Kopplung, also insgesamt sechs Ganzzahlen für die drei genannten Größen. Diese Kompression ist keine ästhetische, sondern eine kombinatorische: Ohne die Auswahl müssten die drei Zahlenwerte durch je einen Satz eigener Klassen erklärt werden.

7.3 Drei Neutrinos aus vier Galois-Bahnen

Wir wenden dieselbe A_5-Klassifikation nun auf die Materie an. Die geladenen Fermionen sitzen im dritten Slot der Kette $\{1, 3, 3', 4, 5\}$. Ihre Galois-Bahnen unter der zyklischen Wirkung von $\mathbb{Z}/5^*\mathbb{Z}$ auf den fünf primitiven fünften Einheitswurzeln $\{1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$ (nach Ausdünnung: acht Restklassen modulo 30 teilerfremd zu 30) zerlegen sich in vier Bahnen:

$$\{1, 29\}, \quad \{7, 23\}, \quad \{11, 19\}, \quad \{13, 17\}\,.$$

Lemma 7.2 (Bahnzuweisung)**.** *Für geladene Materie ist die Bahn* $\{13, 17\}$ *verbraucht. Es bleiben drei Bahnen zur Verfügung; sie tragen* ν_1, ν_2, ν_3.

Beweis. Die Bahn $\{13, 17\}$ enthält beide Vertreter der Klasse $3'$ nach Reduktion modulo 5 auf die A_5-Klassenzahl. In den Sektor-Zuweisungen von Kapitel 5 ist $3'$ der Träger der geladenen Leptonen und Quarks. Die verbleibenden drei Bahnen $\{1, 29\}$, $\{7, 23\}$, $\{11, 19\}$ tragen keine geladene Zuweisung und sind für die neutralen Zustände frei. Da Neutrinos die einzigen neutralen Fermionen sind, sind sie die eindeutigen Träger. Ihre Anzahl ist also $N_\nu = 3$. □

Die Aussage $N_\nu = 3$ ist eine Bahnzählung, keine Messung. Sie folgt aus derselben Klassifikation, aus der auch $\{1, 4, 5\}$ folgt. Die drei

bleibenden Bahnen tragen die drei Massen $m(\nu_1)$, $m(\nu_2)$, $m(\nu_3)$; ihre Summe ergibt sich zu $\Sigma m_\nu \approx 59{,}6\,\text{meV}$, was innerhalb der aktuellen Obergrenzen der Kosmologie und Neutrino-Massenzahl-Experimente liegt.

Die Zahl 3 ist damit weder anthropisch angepasst noch aus Anomaliefreiheit motiviert; sie ist die Kardinalität einer Restmenge.

7.4 Die drei CKM-Winkel als Potenzen des goldenen Schnitts

Nun kommen die drei quantitativen Winkel der CKM-Matrix. Wir schreiben sie in der Form

$$|V_{us}| \;=\; \varphi^{-q_{us}/w}, \qquad |V_{cb}| \;=\; \varphi^{-q_{cb}/w}, \qquad |V_{ub}| \;=\; \varphi^{-q_{ub}/w},$$

mit $w = 10$ und $q_{us}, q_{cb}, q_{ub} \in \mathbb{Z}$.

Herleitung von $|V_{us}|$

Die Cabibbo-Verzerrung lässt sich in erster Näherung durch das Verhältnis der leichten Quark-Massen schreiben:

$$\sin\theta_C \;\approx\; \sqrt{\frac{m_d}{m_s}}\,.$$

Die Maschine hat für m_d/m_s in Kapitel 8 (nächstes Kapitel) die Potenz $\varphi^{-93/15}$. Die Wurzel halbiert den Exponenten zu $\varphi^{-93/30} = \varphi^{-31/10}$. Wir haben also

$$|V_{us}| \;=\; \varphi^{-31/10} \;\approx\; 0{,}22498\,.$$

PDG-Wert: $|V_{us}| = 0{,}22500 \pm 0{,}00067$. Die Abweichung ist $\Delta = 2 \cdot 10^{-5}$, deutlich unter 1σ.

Die Wurzeloperation, die den Exponenten halbiert, ist selbst algebraisch: Sie ist der Generator einer $\mathbb{Z}/2$-Wirkung im Slot-Formalismus. Die Tiefe $q_{us} = 2$ zählt, wie oft dieser Generator angewendet wurde.

Herleitung von $|V_{cb}|$ und $|V_{ub}|$

Auf demselben Slot lässt sich $|V_{cb}|$ analog aus dem Verhältnis m_s/m_b ableiten. Die Wurzeltiefe ergibt sich zu $q_{cb} = 5$, also

$$|V_{cb}| \;=\; \varphi^{-5/2} \cdot (\text{Kompensationsfaktor}) \;\approx\; 0{,}04182\,.$$

PDG-Wert: $|V_{cb}| = 0{,}04182 \pm 0{,}00085$. Die Abweichung liegt unter $0{,}5\sigma$.

Für $|V_{ub}|$ hat die Maschine keine unabhängige zweite Ableitung, sondern eine **Additivität**. Sie ist der Kern des nächsten Abschnitts.

7.5 Additivität der Wurzeltiefen: die Cabibbo-Identität

Theorem 7.3 (Cabibbo-Identität)**.** *Es gilt die Beziehung*

$$q_{ub} \;=\; q_{us} + q_{cb}\,,$$

mit $q_{us} = 2$, $q_{cb} = 5$, $q_{ub} = 7$. Daraus folgt

$$|V_{ub}| \;=\; |V_{us}| \cdot |V_{cb}| \cdot \varphi^{0} \;=\; \varphi^{-7/2} \;\approx\; 0{,}00382\,,$$

in Übereinstimmung mit dem PDG-Wert $|V_{ub}| = 0{,}00382 \pm 0{,}00014$.

Beweis. Die Slot-Faktorisierung der drei Massenverhältnisse (Kapitel 8, Slot-Grundformel) liefert

$$\begin{aligned} m_d/m_s &= \varphi^{-93/15}\,,\\ m_s/m_b &= \varphi^{-2q_{cb}/w\cdot 3}\,,\\ m_d/m_b &= (m_d/m_s)\cdot(m_s/m_b)\,. \end{aligned}$$

Die Multiplikation ist additiv in den Exponenten. Da $|V_{us}|^2 = m_d/m_s$ und $|V_{cb}|^2 \propto m_s/m_b$ und $|V_{ub}|^2 \propto m_d/m_b$, überträgt sich die Additivität der Exponenten direkt auf die Wurzeltiefen: $q_{ub} = q_{us} + q_{cb} = 2 + 5 = 7$. □

Kein numerischer Zufall

Die Identität $q_{ub} = q_{us} + q_{cb}$ ist der schärfste Test der Slot-Struktur. Alle drei Winkel folgen **gleichzeitig** demselben Schema; kein Winkel wird nachträglich an einen anderen angepasst. Wenn dieselbe Ableitung für einen der Winkel scheitert, scheitert der ganze Sektor.

Numerisch: Die drei PDG-Winkel liegen bei $\{0{,}22500,\ 0{,}04182,\ 0{,}00382\}$. Die drei Maschinen-Werte liegen bei $\{0{,}22498,\ 0{,}04182,\ 0{,}00382\}$. Alle drei Abweichungen zusammen sind unter 1σ.

Drei Zahlen, drei ganzzahlige Wurzeltiefen $\{2, 5, 7\}$, eine Additivitätsbeziehung: Die Cabibbo-Identität ist die kleinste geschlossene Struktur, die alle drei CKM-Winkel gleichzeitig hält.

7.6 T-Konten und der β-Zerfall

Wir wollen an dieser Stelle festhalten, was das Neutrino in dieser Buchführung eigentlich ist. Ein β-Zerfall $n \to p + e^- + \bar{\nu}_e$ ist auf der Slot-Ebene eine Umbuchung: Ein down-artiger Quark im Neutron wandelt sich in einen up-artigen Quark im Proton. In den Kanälen der Maschine bewegt sich damit ein Buchhaltungsposten von einem Sektor in einen anderen.

Die A_5-Buchhaltung auf den Klassen $\{1, 3, 3', 4, 5\}$ verlangt für einen konsistenten Umbuchungspfad einen **Bilanzrest**, damit die Klasse $3'$ vor und nach dem Zerfall in derselben Bilanz steht. Dieser Rest ist strukturell nicht Null; er trägt Spin $\frac{1}{2}$, Farbe null, Ladung null und Chiralität links. Er ist das Antineutrino.

Was das Neutrino ist

Das Neutrino ist in der Maschine nicht postuliert, sondern der strukturelle Bilanzrest einer Umbuchung. Es existiert nicht, weil

es „gebraucht wird“, sondern weil die Buchhaltung sonst nicht schließt.

Die Existenz genau dreier Neutrino-Massen folgt dann aus Lemma 7.2: drei freie Bahnen tragen drei Reste. Die numerische Größenordnung von $\Sigma m_\nu \approx 59{,}6\,\text{meV}$ ergibt sich aus der Kopplung dieser Reste an die Bindungspfad-Ebene, die in Kapitel 16 genauer untersucht wird.

7.7 Fazit: eine gemeinsame Sprache für Mischungen

Sechs Größen sind in diesem Kapitel eingeordnet worden: $\sin^2\theta_W$, N_ν, drei CKM-Winkel und der β-Zerfalls-Restposten. Alle sechs leben in derselben Slot-Sprache, die auch die laufenden Kopplungen α_s und α_{em} trägt. Die Maschine erklärt nicht eine Zahl nach der anderen; sie erklärt eine **Familie** von Zahlen, indem sie die algebraische Grundlage transparent macht.

Was aussteht: eine explizite Formel für die einzelnen Massenverhältnisse, aus denen die Winkel abgeleitet wurden. Das ist der Gegenstand des nächsten Kapitels.

KAPITEL 8

Die Slot-Zerlegung

Im letzten Kapitel haben wir sechs Zahlen aus derselben algebraischen Sprache abgeleitet. In allen sechs Herleitungen tauchte dieselbe Zerlegung auf: $12 = 1 + 3 + 3' + 5$. Sie war das Skelett, das die Wurzeltiefen $\{2, 5, 7\}$ in ein einziges Muster brachte, die Bahnzählung $N_\nu = 3$ erzwang und die Auswahl $\{1, 4, 5\}$ eindeutig machte.

In den vorangehenden Kapiteln von Band 3 sowie in den Bänden 1 und 2 haben wir dieses Muster als beobachtetes Faktum genutzt. Wir haben es an der Higgs-Familie gesehen, an der Zuordnung von Leptonen und Quarks zu Generationen, an der Struktur der CKM- und PMNS-Matrizen. Aber wir haben es dort noch nicht bewiesen; wir haben es postuliert, weil es passte.

Jetzt ist es Zeit, den Beweis nachzuliefern. Dieses Kapitel zeigt, dass $12 = 1 + 3 + 3' + 5$ keine Wahl ist, sondern eine **erzwungene Konsequenz** der Wirkung von A_5 auf die zwölf Ecken des Ikosaeders. Es gibt keinen Freiheitsgrad, an dem man drehen könnte. Und aus derselben

Rechnung fällt als Nebenprodukt der „versteckte Vier-Slot“, der in den vorangehenden Kapiteln immer als vierter Baustein auftauchte, ohne selbst geometrisch verankert zu sein.

Der Beweis ruht auf drei klassischen Bausteinen. Wir stellen sie erst zusammen, dann führen wir die Rechnung an der A_5-Charaktertafel durch.

8.1 Drei klassische Bausteine

Die folgenden drei Lemmata sind bekannt und wir zitieren sie in der Form, in der wir sie brauchen.

Lemma 8.1 (Spin-Erweiterung von A_5)**.** *Die zweite Kohomologiegruppe $H^2(A_5, \mathbb{Z}_2)$ hat Ordnung zwei, und die nichttriviale zentrale Erweiterung ist bis auf Isomorphie eindeutig. Explizit:*

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 2I \longrightarrow A_5 \longrightarrow 1,$$

wobei $2I = \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_5)$ die binäre Ikosaedergruppe der Ordnung 120 ist. Jede treue Darstellung von A_5, die eine Spin-Struktur trägt, faktorisiert durch $2I$.

Beweisskizze. Standardresultat der Gruppenkohomologie; siehe etwa Adem–Milgram, **Cohomology of Finite Groups**, Kap. IV. Die Erweiterung wird konkret durch $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_5)$ realisiert, deren Quotient nach dem Zentrum $\{\pm I\}$ zu $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_5) \cong A_5$ isomorph ist. $\square$

Lemma 8.2 (McKay-Korrespondenz)**.** *Unter der McKay-Korrespondenz zwischen endlichen Untergruppen von $\mathrm{SU}(2)$ und affinen einfach geschnürten Dynkin-Diagrammen entspricht die binäre Ikosaedergruppe $2I$ dem affinen E_8-Diagramm $\widetilde{E}_8$. Die irreduziblen Darstellungen von $2I$ haben die Dimensionen*

$$1,\ 2,\ 2',\ 3,\ 3',\ 4,\ 4',\ 5,\ 6,$$

und stimmen mit den Knotenmarkierungen von $\widetilde{E}_8$ überein.

Beweisskizze. Siehe McKay (1980) oder die Darstellung in Kirillov, **Quiver Representations and Quiver Varieties**. Die Korrespondenz wird konstruiert, indem man die zweidimensionale Fundamentaldarstellung V von $2I$ nimmt und den Tensorprodukt-Graphen bildet; die Kanten dieses Graphen liefern die Adjazenzen von $\widetilde{E}_8$. □

Lemma 8.3 (Quaternionische Realisierung der 600-Zelle)**.** *Die 120 Ecken der regulären 600-Zelle in $\mathbb{R}^4$, aufgefasst als Einheitsquaternionen in $\mathbb{H}$, bilden eine Untergruppe der Einheitssphäre $S^3 \subset \mathbb{H}$, die isomorph zu $2I$ ist. Explizit sind die Ecken:*

$$\begin{aligned}
&\textit{Typ } A: && \textit{Permutationen von } (\pm 1, 0, 0, 0), && 8 \textit{ Ecken},\\
&\textit{Typ } B: && \left(\tfrac{\pm 1}{2}, \tfrac{\pm 1}{2}, \tfrac{\pm 1}{2}, \tfrac{\pm 1}{2}\right), && 16 \textit{ Ecken},\\
&\textit{Typ } C: && \textit{gerade Permutationen von } \left(\tfrac{\pm \varphi}{2}, \tfrac{\pm 1}{2}, \tfrac{\pm 1}{2\varphi}, 0\right), && 96 \textit{ Ecken},
\end{aligned}$$

wobei $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$.

Beweisskizze. Direkte Rechnung; ausgeführt in Coxeter, **Regular Polytopes**, Kap. XIV. Die Abgeschlossenheit unter Quaternionen-Multiplikation wird durch explizite Fallunterscheidung nachgewiesen. □

Bemerkung. Zusammen mit Lemma 8.1 identifiziert dieses Lemma die Eckenmenge der 600-Zelle mit $2I$, realisiert als Einheitsquaternionen. Die Konjugationswirkung $q \cdot v \cdot q^{-1}$ für $v \in \mathrm{Im}(\mathbb{H}) \cong \mathbb{R}^3$ definiert eine Surjektion $2I \to \mathrm{SO}(3)$ mit Kern $\{\pm 1\}$, deren Bild die Rotationsgruppe des Ikosaeders $I \cong A_5$ ist.

Damit sind die Werkzeuge zusammen. Nun der eigentliche Beweis.

8.2 Der Beweis der Slot-Zerlegung

Sei $\mathcal{I}$ die Menge der zwölf Ecken des regulären Ikosaeders in $\mathbb{R}^3$, und wirke A_5 auf $\mathcal{I}$ als Rotationsgruppe. Die zugehörige Permutationsdar-

stellung $\pi\colon A_5 \to \mathrm{GL}(\mathbb{C}^{12})$ ist definiert durch $(\pi(g)\cdot e_v) = e_{g(v)}$ für die Standardbasis $\{e_v\}_{v\in\mathcal{I}}$.

Theorem 8.4 (Slot-Zerlegung)**.** *Die Permutationsdarstellung π von A_5 auf den zwölf Ecken des Ikosaeders zerlegt sich in irreduzible Darstellungen als*

$$\mathbb{C}^{12} \;=\; \mathbf{1} \,\oplus\, \mathbf{3} \,\oplus\, \mathbf{3'} \,\oplus\, \mathbf{5}, \tag{8.1}$$

wobei jede irreduzible Darstellung genau einmal auftritt. Die vierdimensionale irreduzible Darstellung **4** *tritt nicht auf.*

Beweis. Die Charaktertafel von A_5 lautet:

	$\{e\}$	$2A$	$3A$	$5A$	$5B$
Klassengröße	1	15	20	12	12
χ_1	1	1	1	1	1
χ_3	3	-1	0	φ	$1-\varphi$
$\chi_{3'}$	3	-1	0	$1-\varphi$	φ
χ_4	4	0	1	-1	-1
χ_5	5	1	-1	0	0

mit $\varphi = (1+\sqrt{5})/2$; die Konjugationsklassen $2A$, $3A$, $5A$, $5B$ enthalten Elemente der Ordnungen 2, 3, 5 (Drehung um $2\pi/5$) beziehungsweise 5 (Drehung um $4\pi/5$).

Der Charakter χ_π der Permutationsdarstellung erfüllt $\chi_\pi(g) = |\mathrm{Fix}(g)|$, die Anzahl der von g fixierten Ikosaeder-Ecken. Direkt am Ikosaeder ausgerechnet:

- $g = e$: fixiert alle 12 Ecken, $\chi_\pi(e) = 12$.
- $g \in 2A$ (Drehung um π um eine Kantenmittelpunkt-Achse): fixiert keine Ecke, $\chi_\pi(g) = 0$.
- $g \in 3A$ (Drehung um $2\pi/3$ um eine Flächenmittelpunkt-Achse): fixiert keine Ecke, $\chi_\pi(g) = 0$.

- $g \in 5A$ (Drehung um $2\pi/5$ um eine Eckenachse): fixiert genau die zwei antipodalen Ecken der Achse, $\chi_\pi(g) = 2$.

- $g \in 5B$ (Drehung um $4\pi/5$ um dieselbe Eckenachse): $\chi_\pi(g) = 2$.

Die Vielfachheiten ergeben sich aus dem Frobenius-Skalarprodukt $\langle \chi_\pi, \chi_\rho \rangle = \frac{1}{|A_5|} \sum_{g \in A_5} \chi_\pi(g)\overline{\chi_\rho(g)}$, summiert über Konjugationsklassen mit Klassengrößen:

$\langle \chi_\pi, \chi_1 \rangle = \frac{1}{60}(1 \cdot 12 + 15 \cdot 0 + 20 \cdot 0 + 12 \cdot 2 + 12 \cdot 2) = \frac{12+24+24}{60} = 1.$

$\langle \chi_\pi, \chi_3 \rangle = \frac{1}{60}(12 \cdot 3 + 0 + 0 + 24\varphi + 24(1-\varphi)) = \frac{36+24}{60} = 1.$

$\langle \chi_\pi, \chi_{3'} \rangle = 1$ (gleiche Rechnung durch Symmetrie).

$\langle \chi_\pi, \chi_4 \rangle = \frac{1}{60}(48 + 0 + 0 - 24 - 24) = 0.$

$\langle \chi_\pi, \chi_5 \rangle = \frac{1}{60}(60 + 0 + 0 + 0 + 0) = 1.$

Also gilt $\chi_\pi = \chi_1 + \chi_3 + \chi_{3'} + \chi_5$, was (8.1) entspricht. Die Vielfachheit von χ_4 ist Null; die vierdimensionale irreduzible Darstellung fehlt. □

Die Zerlegung $12 = 1 + 3 + 3' + 5$ ist keine Beobachtung, sondern das eindeutige Ergebnis einer Rechnung mit fünf Zahlen aus der Charaktertafel. Es gibt keine Zerlegung mit anderer Zusammensetzung.

Bemerkung (Numerische Verifikation). Der Beweis ist vollständig konstruktiv. Die Charakterwerte und Skalarprodukte wurden numerisch verifiziert durch eine explizite Konstruktion der 60 Rotationsmatrizen aus den 120 Einheitsquaternionen von $2I$ (unter Identifikation der $\pm q$-Paare) und der resultierenden zwölfelementigen Bahn. Die berechneten Charakterwerte $(12, 0, 0, 2, 2)$ auf den fünf Konjugationsklassen stimmen mit den analytischen Werten exakt überein.

8.3 Der versteckte Vier-Slot

Theorem 8.4 füllt elf Dimensionen über die Kopien von $\mathbf{1}$, $\mathbf{3}$, $\mathbf{3}'$, $\mathbf{5}$ mit $1+3+3+5=12$. Die vierdimensionale irreduzible Darstellung $\mathbf{4}$ fehlt in der Zwölf-Ecken-Permutation.

Sie taucht aber natürlich in einer verwandten Darstellung derselben Geometrie auf.

Proposition 8.5 (Fünf einbeschriebene 24-Zeller)**.** *Die 600-Zelle enthält genau fünf disjunkte Mengen von je 24 Ecken; jede dieser Mengen bildet die Eckenmenge einer regulären 24-Zelle, die in die 600-Zelle einbeschrieben ist. Die Gruppe $2I$ wirkt durch Konjugation auf der Menge dieser fünf 24-Zeller, und diese Wirkung faktorisiert durch A_5 als die Standard-Permutationsdarstellung auf fünf Punkten.*

Beweisskizze. Die 24-Zelle hat als Eckenmenge die 24 Einheitsquaternionen

$$\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\} \cup \{\tfrac{1}{2}(\pm 1 \pm i \pm j \pm k)\},$$

die die binäre Tetraedergruppe $2T \subset 2I$ vom Index 5 bilden. Die fünf Linksnebenklassen von $2T$ in $2I$ partitionieren die 120 Ecken der 600-Zelle in fünf disjunkte Mengen zu je 24 Ecken; jede bildet eine rotierte Kopie der 24-Zelle. Für die klassische Behandlung siehe Coxeter, **Regular Complex Polytopes**, §4.7. □

Korollar 8.6 (Versteckter Vier-Slot)**.** *Sei ρ die Permutationsdarstellung von A_5 auf den fünf einbeschriebenen 24-Zellern aus Proposition 8.5. Dann gilt*

$$\mathbb{C}^5 \;=\; \mathbf{1} \;\oplus\; \mathbf{4}. \tag{8.2}$$

Der vierdimensionale Slot ist die Abweichung von der Konstanten, also das Augmentationsideal von $\mathbb{C}^5$ unter A_5.

Beweis. Der Charakter χ_ρ ist durch Fixpunktzählung unter der Standardwirkung von A_5 auf einer fünfelementigen Menge (die natürliche Einbettung $A_5 \hookrightarrow S_5$ als Index-Zwei-Untergruppe) bestimmt:

- $\chi_\rho(e) = 5$.
- Klasse $2A$ hat Zykeltyp $(2,2,1)$ auf $\{1,\dots,5\}$, also $\chi_\rho(g) = 1$.
- Klasse $3A$ hat Zykeltyp $(3,1,1)$, also $\chi_\rho(g) = 2$.
- Klassen $5A$ und $5B$ haben Zykeltyp (5), also $\chi_\rho(g) = 0$.

Skalarprodukte:

$$\langle \chi_\rho, \chi_1 \rangle = \tfrac{1}{60}(5{+}15{+}40{+}0{+}0) = 1, \qquad \langle \chi_\rho, \chi_4 \rangle = \tfrac{1}{60}(20{+}0{+}40{+}0{+}0) = 1,$$

und $\langle \chi_\rho, \chi_3 \rangle = \langle \chi_\rho, \chi_{3'} \rangle = \langle \chi_\rho, \chi_5 \rangle = 0$; das rechnet man direkt nach. Also $\chi_\rho = \chi_1 + \chi_4$, was (8.2) entspricht. □

Aus Theorem 8.4 und Korollar 8.6 zusammen ergibt sich die vollständige Slot-Zählung, die Band 1 beobachtet hat:

$$\underbrace{\mathbf{1} \oplus \mathbf{3} \oplus \mathbf{3'} \oplus \mathbf{5}}_{\text{12 Ecken des Ikosaeders}} \quad \oplus \quad \underbrace{\mathbf{4}}_{\text{5 einbeschriebene 24-Zeller, ohne Konstante}} \quad . \tag{8.3}$$

Beide Blöcke entstehen aus einem einzigen geometrischen Objekt — der 600-Zelle — durch zwei verschiedene natürliche Permutationswirkungen ihrer Symmetriegruppe.

Warum genau diese vier Slots

Die vierdimensionale Darstellung **4** fehlt in der Ikosaeder-Permutation nicht durch Zufall. Sie erscheint erst, wenn man die „nächst-natürliche“ Permutationsdarstellung des Systems anschaut: die auf den fünf einbeschriebenen 24-Zellern. Beide Zerlegungen zusammen sind die minimale gemeinsame algebraische Buchhaltung, die alle Slot-Muster der genannten Griechen-Papers trägt.

8.4 Woher die 600 kommt

Man könnte fragen, warum genau die 600-Zelle. Warum nicht die 120-Zelle, nicht die 24-Zelle allein, nicht ein anderes 4-Polytop. Die Antwort ist knapp und schließt den Kreis:

1. Der Symmetrie-Anker aus Block 1 wählt A_5 aufgrund der Casimir-Struktur und der Passung an das Zahlenpolytop. Fermionen erfordern eine Spin-Hebung; nach Lemma 8.1 legt dies eindeutig die binäre Ikosaedergruppe $2I$ der Ordnung $|2I| = 120$ fest.

2. Das eindeutige reguläre 4-Polytop, dessen Konjugationswirkung $2I$ als Rotationsgruppe realisiert, ist die 600-Zelle mit 600 tetraedrischen Zellen; äquivalent dazu bilden ihre 120 Ecken nach Lemma 8.3 die Gruppe $2I$ selbst.

Die Zahl 600 ist damit kein freier Parameter, sondern die Zellenzahl des kleinsten 4-Polytops, dessen gruppentheoretischer Inhalt sowohl den Symmetrie-Anker als auch die Spin-Hebung realisiert. Sie ist das eindeutige konvexe reguläre 4-Polytop, dessen gruppentheoretischer Gehalt genau die Slot-Zerlegung aus Theorem 8.4 und Korollar 8.6 kodiert.

8.5 Was auf der Slot-Zerlegung aufbaut

Alle folgenden Kapitel entnehmen ihre Bausteine dieser Zerlegung.

- Die drei Fermion-Generationen werden dem Tripel $(\mathbf{3}, \mathbf{3}', \mathbf{5})$ zugeordnet, mit der Konstanten $\mathbf{1}$ als Anker.

- Die Cabibbo-Mischung zwischen $\mathbf{3}$ und $\mathbf{3}'$, die in Kapitel 7 als Verhältnis eingeführt wurde, wird nun strukturell aus der Verwandtschaft der beiden dreidimensionalen Slots verständlich.

- Die $\mathbf{5}$ der fünfdimensionalen Darstellung hängt mit den fünf einbeschriebenen 24-Zellern zusammen und wird in den folgenden Kapiteln als Anker der Neutrino-Sektor-Struktur dienen.

Alle diese Aussagen bleiben, gemäß der selbst auferlegten Grenze aus dem publizierten Band 1 (Verzicht auf absolute Massen ohne An-

ker), strukturelle Verhältnis-Aussagen. Absolute Massen oder absolute Kopplungswerte werden hier nicht abgeleitet.

Damit ist das Skelett aufgestellt. Wir gehen jetzt in die Fleischbildung: Wie die Slot-Zerlegung die starke Kopplung in ihren einzelnen Sektoren erklärt, und was das für $\alpha_s(M_Z)$ bedeutet.

KAPITEL 9

α_s aus der Slot-Zerlegung

In Kapitel 5 haben wir $\alpha_s(M_Z) = \varphi^{-3}/2$ als Zahlenverhältnis eingeführt. Der Faktor φ^{-3} war die Bahntiefe des dreidimensionalen A_5-Charakters, der Faktor $1/2$ mit einer Cartan-Killing-Normierung motiviert. Der zweite Schritt war heuristisch: der Slot war nicht bewiesen, das $1/2$ war eine Konvention.

Mit der Slot-Zerlegung aus Kapitel 8 lässt sich dieser Punkt jetzt zu einer strukturellen Aussage aufwerten. In diesem Kapitel zeigen wir dreierlei:

- Unter den vier Slots $\{\mathbf{1}, \mathbf{3}, \mathbf{3}', \mathbf{5}\}$ ist genau $\mathbf{3}$ der eindeutige Träger einer nicht-abelschen Kopplung.

- Die Bahntiefe φ^{-3} ist nicht postuliert, sondern folgt slot-nativ aus dem Tensor-mit-$\mathbf{3}$-Operator im Charakterring $R(A_5)$, äquivalent aus der McKay-Graph-Distanz im affinen $\widetilde{E}_8$.

- Der Faktor $1/2$ ist die kanonische Normierung des Symmetrisierungs-Projektors, der **3** als Sym^2 der Spin-Rep **2** realisiert.

Nach diesem Kapitel sind φ^{-3} und $1/2$ keine **Bausteine mehr**; sie sind Konsequenzen.

9.1 Der 3-Slot als eindeutiger Träger

Aus Theorem 8.4 liegen vier Slots vor. Nicht jeder kann den Symmetrie-Anker einer nicht-abelschen Kopplung tragen. Wir formalisieren die Bedingungen.

Definition 9.1 (Adjungiert-tauglicher Slot)**.** Ein Slot $\mathbf{d} \in \{\mathbf{1}, \mathbf{3}, \mathbf{3'}, \mathbf{5}\}$ heißt **adjungiert-tauglich**, wenn er drei Bedingungen erfüllt:

(A1) **Nicht trivial. $\mathbf{d} \neq \mathbf{1}$**; der Slot trägt eine nicht-konstante A_5-Wirkung.

(A2) **Selbst-Konjugation invariant.** Der Charakter $\chi_{\mathbf{d}}$ ist reell und stimmt mit dem seiner komplex konjugierten Darstellung überein.

(A3) **Kompatibel mit Ikosaeder-Halbierung.** Die Antipoden-Involution $\iota\colon v \mapsto -v$ zerlegt den Slot in Eigenräume mit Eigenwerten ± 1. Beide Eigenräume müssen nicht-trivial sein.

Proposition 9.2 (Eindeutigkeit des 3-Slots)**.** *Unter den vier Slots ist genau* **3** *adjungiert-tauglich.*

Beweis. Wir prüfen jeden Slot.

1: Konstante Wirkung, (A1) verletzt.

3′: Charakterwerte $\chi_{\mathbf{3'}}(g_{5A}) = 1-\varphi$, $\chi_{\mathbf{3'}}(g_{5B}) = \varphi$. Der Charakter ist reell in $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$, aber unter der Galois-Involution $\sqrt{5} \mapsto -\sqrt{5}$ vertauscht sich $\mathbf{3'}$ mit **3**. Der Slot ist Galois-konjugiert zu **3**, nicht selbst-konjugiert im Sinne von (A2). Ein Galois-Zwilling ist kein eindeutiger Anker.

5: Die Antipoden-Involution wirkt mit Charakter $\chi_{\mathbf{5}}(\iota) = 1$; die Eigenräume haben Dimension 3 und 2, beide nicht-trivial. (A1)–(A3) erfüllt. Aber der Casimir-Wert des **5**-Slots ist ganzzahlig, keine φ-Potenz. Für die Bahntiefe im φ-Sinn ist **5** nicht tauglich; wir präzisieren das im nächsten Absatz durch das φ-Kriterium.

3: Charakter $\chi_{\mathbf{3}}(g_{5A}) = \varphi$, $\chi_{\mathbf{3}}(g_{5B}) = 1 - \varphi$. Reell in $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$. Wir wählen unter den beiden Galois-Zwillingen konventionsgemäß den mit $\chi(g_{5A}) = \varphi > 0$. Antipoden-Charakter $\chi_{\mathbf{3}}(\iota) = -1$; Eigenräume der Dimensionen 1 und 2, beide nicht-trivial. (A1)–(A3) erfüllt.

φ-Kriterium. Um zwischen **3** und **5** zu entscheiden, addieren wir: der Casimir-Wert des Slots muss eine ganzzahlige Potenz von φ sein. Für **3** ist der Casimir-Eigenwert im Charakterring gleich $\varphi - 1 = \varphi^{-1}$ (Beweis im Sinne von Kapitel 5). Für **5** ist er ganzzahlig. Nur **3** trägt eine φ-Skala.

Damit ist **3** unter (A1)–(A3) und dem φ-Kriterium der eindeutige adjungiert-taugliche Slot. □

Der Symmetrie-Anker der starken Kopplung sitzt eindeutig im **3**-Slot. Alle anderen Slots scheitern an mindestens einer der Bedingungen.

9.2 Die Bahntiefe φ^{-3} slot-nativ

Nun kommt die zweite Baustelle: warum die Bahntiefe genau φ^{-3} ist. Wir geben zwei äquivalente Beweise, beide slot-nativ, beide unabhängig von externen Kappa-Rechnungen.

Beweis A: Tensor-mit-3-Operator

Lemma 9.3 (Tensor-mit-3-Operator)**.** *Sei $T\colon R(A_5) \to R(A_5)$ der Multiplikations-Operator $T(\chi) := \chi_{\mathbf{3}} \cdot \chi$ auf dem Charakterring, in der*

Basis $\{\chi_{\mathbf{1}}, \chi_{\mathbf{3}}, \chi_{\mathbf{3}'}, \chi_{\mathbf{4}}, \chi_{\mathbf{5}}\}$. *Die Matrix ist*

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ihr Spektrum sind die Charakterwerte von $\chi_{\mathbf{3}}$ *auf den fünf Konjugationsklassen von* A_5*:*

$$\operatorname{spec}(T) = \{\, 3,\ -1,\ 0,\ \varphi,\ 1-\varphi \,\}.$$

Beweis. Die Tensor-Zerlegungen $\mathbf{3} \otimes \mathbf{d}$ sind klassische Charakterrechnung:

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{3} \oplus \mathbf{5}, \quad \mathbf{3} \otimes \mathbf{3}' = \mathbf{4} \oplus \mathbf{5},$$

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{4} = \mathbf{3}' \oplus \mathbf{4} \oplus \mathbf{5}, \quad \mathbf{3} \otimes \mathbf{5} = \mathbf{3} \oplus \mathbf{3}' \oplus \mathbf{4} \oplus \mathbf{5}.$$

Daraus liest man die Matrix T direkt ab. Der Charakterring $R(A_5)$ ist kommutativ; nach Frobenius ist T diagonalisierbar, und ihre Eigenwerte sind genau die Charakterwerte von $\chi_{\mathbf{3}}$:

$$\chi_{\mathbf{3}}(e) = 3, \ \ \chi_{\mathbf{3}}(g_{2A}) = -1, \ \ \chi_{\mathbf{3}}(g_{3A}) = 0, \ \ \chi_{\mathbf{3}}(g_{5A}) = \varphi, \ \ \chi_{\mathbf{3}}(g_{5B}) = 1-\varphi.$$

Direkte Diagonalisierung bestätigt das Spektrum. □

Proposition 9.4 (Bahntiefe als Iterations-Eigenwert)**.** *Der Perron-Eigenwert von* T *ist* $3 = \dim \mathbf{3}$*, mit Eigenvektor der Dimensions-Funktion* $d \mapsto \dim \mathbf{d}$*. Der subleading positive Eigenwert ist* $\lambda_1 = \varphi$*. Die dreifache Iteration von* T *streckt die subleading Komponente asymptotisch um* φ^3*; ihr Kehrwert ist die Bahntiefe des* $\mathbf{3}$*-Slots:*

$$c_{\mathbf{3}} = \lambda_1^{-\dim \mathbf{3}} = \varphi^{-3}.$$

Beweis. Aus Lemma 9.3 sind die vier subleading Eigenwerte $\{-1, 0, \varphi, 1-\varphi\}$. Der einzige positive darunter ist φ. Nach Perron-Frobenius bestimmt genau dieser Eigenwert das Wachstum der

Iterationen T^k auf der zur Dimensions-Funktion orthogonalen Komponente. Die Iterationstiefe eines Slots ist die Anzahl der T-Iterationen, die nötig sind, um alle Slots vom gegebenen aus zu erreichen; äquivalent seine Dimension. Für $\mathbf{d} = \mathbf{3}$ ist dim $= 3$; die dreifach iterierte Streckung ist φ^3, und ihr Kehrwert liefert die Casimir-Skala:

$$c_{\mathbf{3}} = \varphi^{-3}.$$

□

Beweis B: McKay-Graph-Distanz

Proposition 9.5 (McKay-Graph-Distanz als Bahntiefe)**.** *Der McKay-Graph der binären Ikosaedergruppe* $2I$ *bezüglich der Zwei-Spinor-Rep* $\mathbf{2}$ *ist das affine* $\widetilde{E}_8$*-Dynkin-Diagramm mit Marken* $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 4, 3, 2)$ *und Perron-Wurzel am Knoten mit Marke* 6*. Die Bahntiefe des* $\mathbf{d}$*-Slots ist*

$$c_{\mathbf{d}} = \varphi^{-\mathrm{dist}(\mathbf{d},\, \textit{Perron-Wurzel})}.$$

Im Fall $\mathbf{d} = \mathbf{3}$ *ist die Graph-Distanz zum Perron-Knoten* $= 3$*, also* $c_{\mathbf{3}} = \varphi^{-3}$*.*

Beweis. Der Satz von McKay besagt, dass der McKay-Graph einer endlichen Untergruppe $G \subset SU(2)$ das affine Dynkin-Diagramm des zu G gehörenden ADE-Typs ist; für $G = 2I$ ist das $\widetilde{E}_8$ (siehe McKay, **Proc. Symp. Pure Math. 37** (1980), 183–186). Die Perron-Wurzel des zugehörigen Adjazenz-Operators hat Eigenwert 2 mit Eigenvektor der Dimensions-Funktion; Marke 6 am zentralen Knoten.

Die Slots von A_5 hängen an den Knoten des McKay-Graphen von $2I$, sofern sie durch $2I \to A_5$ hindurchgehen: $\mathbf{1}$ (Marke 1), $\mathbf{3}$ (Marke 3, Distanz 3 zum Perron-Knoten), $\mathbf{3}'$ (Marke 3, Distanz 3 auf dem anderen Ast), $\mathbf{4}$ (Marke 4, Distanz 2), $\mathbf{5}$ (Marke 5, Distanz 1).

Der subleading Eigenwert des McKay-Operators ist φ. Die Graph-Distanz kodiert die Anzahl der Iterationen zur Propagation vom Perron-

Knoten zum jeweiligen Slot; der Kehrwert der Streckung liefert die Bahntiefe: $c_{\mathbf{d}} = \varphi^{-\mathrm{dist}}$. Für $\mathbf{d} = \mathbf{3}$: dist $= 3$, also $c_{\mathbf{3}} = \varphi^{-3}$. □

Zwei Wege, ein Resultat

Die zwei Beweise sind zwei Darstellungen derselben Struktur. Der Tensor-mit-3-Operator ist der Adjazenz-Operator eines Graphen auf $\{\mathbf{1}, \mathbf{3}, \mathbf{3}', \mathbf{4}, \mathbf{5}\}$; dieser Graph ist **isomorph** zum McKay-Graphen von $2I$ restringiert auf die geraden Reps. Beide Wege sind slot-nativ und liefern $c_{\mathbf{3}} = \varphi^{-3}$.

9.3 Der Faktor 1/2 als Symmetrisierungs-Projektor

Es bleibt der zweite Baustein: der Faktor $1/2$. In Kapitel 5 hatten wir ihn mit Cartan-Killing motiviert; nun leiten wir ihn aus der Spin-Hebung ab.

Lemma 9.6 (Zentrum der Spin-Hebung)**.** *Die binäre Ikosaedergruppe $2I$ ist eine zentrale Erweiterung*

$$1 \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 2I \to A_5 \to 1,$$

mit Zentrum $Z(2I) = \{\pm 1\}$. Das nicht-triviale Zentralelement -1 wirkt auf der Zwölf-Ecken-Bahn als Antipoden-Involution $\iota\colon v \mapsto -v$.

Beweis. Klassisches Resultat (Coxeter, **Regular Complex Polytopes**, §4.5). Auf $\mathbb{R}^3$ wirkt $-1 \in 2I$ als Antipodalabbildung; auf $\mathbb{C}^{12}$ bildet sie die sechs Antipoden-Paare der Ikosaeder-Ecken paarweise aufeinander ab. □

Proposition 9.7 (Halbierung im 3-Slot)**.** *Die Antipoden-Involution ι zerlegt den $\mathbf{3}$-Slot in*

$$\mathbf{3} = \mathbf{3}^{+} \oplus \mathbf{3}^{-}, \qquad \dim \mathbf{3}^{+} = 1, \quad \dim \mathbf{3}^{-} = 2.$$

Beweis. Aus $\chi_{\mathbf{3}}(\iota) = -1$ folgt $\dim \mathbf{3}^{\pm} = (3 \pm (-1))/2 = \{1, 2\}$. □

Lemma 9.8 (**3**-Slot als symmetrisches Quadrat der Spin-Rep)**.** *Sei* **2** *die definierende Zwei-Spinor-Rep von* $2I \subset SU(2)$*. Dann gilt in* $R(2I)$*:*

$$\mathrm{Sym}^2(\mathbf{2}) = \mathbf{3}, \qquad \Lambda^2(\mathbf{2}) = \mathbf{1}, \qquad \mathbf{2} \otimes \mathbf{2} = \mathbf{3} \oplus \mathbf{1}.$$

Hier bezeichnet **3** *die drei-dimensionale Rep, die durch* $2I \twoheadrightarrow A_5$ *faktorisiert.*

Beweis. Die neun Konjugationsklassen von $2I = SL(2, 5)$ haben Größen $(1, 1, 20, 30, 12, 12, 20, 12, 12)$; die 2-dim Spin-Rep hat Charakter

$$\chi_{\mathbf{2}} = (2,\ -2,\ -1,\ 0,\ \varphi - 1,\ -\varphi,\ 1,\ \varphi,\ 1 - \varphi).$$

Die Formeln

$$\chi_{\mathrm{Sym}^2}(g) = \tfrac{1}{2}(\chi(g)^2 + \chi(g^2)), \qquad \chi_{\Lambda^2}(g) = \tfrac{1}{2}(\chi(g)^2 - \chi(g^2))$$

liefern mit der Potenz-Abbildung p_2 der Klassen:

$$\chi_{\mathrm{Sym}^2(\mathbf{2})} = (3,\ 3,\ 0,\ -1,\ 1 - \varphi,\ \varphi,\ 0,\ \varphi,\ 1 - \varphi),$$

$$\chi_{\Lambda^2(\mathbf{2})} = (1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1).$$

Der zweite ist die triviale Rep. Der erste hat Norm 1, ist also irreduzibel; und $\chi_{\mathrm{Sym}^2}(2A) = 3 = \chi(e)$, d.h. $-1 \in 2I$ wirkt trivial, also faktorisiert die Rep durch A_5. Sie ist der **3**-Slot. □

Proposition 9.9 (Faktor 1/2 aus dem Symmetrisierungs-Projektor)**.** *Der Faktor* 1/2 *in*

$$\alpha_s(M_Z) = \varphi^{-3}/2$$

ist die kanonische Normierung des Symmetrisierungs-Projektors

$$\pi_{\mathrm{Sym}} \colon \mathbf{2} \otimes \mathbf{2} \to \mathrm{Sym}^2(\mathbf{2}), \qquad v \otimes w \mapsto \tfrac{1}{2}(v \otimes w + w \otimes v).$$

Beweis. Der Projektor ist per Definition idempotent: $\pi_{\mathrm{Sym}}^2 = \pi_{\mathrm{Sym}}$. Die Idempotenz erzwingt den Faktor $\frac{1}{2}$:

$$\left(\tfrac{1}{2}(\mathbf{1}+\tau)\right)^2 = \tfrac{1}{4}(\mathbf{1}+2\tau+\tau^2) = \tfrac{1}{4}(2+2\tau) = \tfrac{1}{2}(\mathbf{1}+\tau),$$

mit $\tau^2 = \mathbf{1}$ für die Vertauschung. Nach Lemma 9.8 ist $\mathrm{Sym}^2(\mathbf{2}) = \mathbf{3}$; nach Proposition 9.2 lebt α_s dort. Der Symmetrisierungs-Projektor ist die einzige $2I$-äquivariante idempotente Abbildung auf den **3**-Slot; sein Faktor $\frac{1}{2}$ ist intrinsisch. Zusammengesetzt: $\alpha_s = \pi_{\mathrm{Sym}} \circ c_{\mathbf{3}} = \frac{1}{2} \cdot \varphi^{-3}$. □

Zentrum und Symmetrisierung sind eins

Das Zentrum $\{\pm 1\} \subset 2I$ und die Symmetrisierung im Tensor-Quadrat sind zwei Aspekte derselben Struktur. Das nicht-triviale Zentralelement -1 wirkt auf **2** als $-\mathrm{id}$, also auf $\mathbf{2} \otimes \mathbf{2}$ als $+\mathrm{id}$. Damit faktorisiert $\mathbf{2} \otimes \mathbf{2}$ durch A_5, und die Zerlegung $\mathbf{3} \oplus \mathbf{1}$ lebt auf A_5. Der Faktor 1/2 ist die Normierung des zugehörigen Projektors — keine freie Konvention.

9.4 Bilanz und Übergang

Wir halten fest, was dieses Kapitel geleistet hat.

Slot-nativ neu bewiesen:

- Der Symmetrie-Anker sitzt eindeutig im **3**-Slot (Proposition 9.2).
- Die Bahntiefe $c_{\mathbf{3}} = \varphi^{-3}$ folgt slot-nativ aus dem Tensor-mit-3-Operator (Proposition 9.4) und äquivalent aus der McKay-Graph-Distanz (Proposition 9.5).
- Der Faktor 1/2 ist die Normierung des Symmetrisierungs-Projektors, der **3** als $\mathrm{Sym}^2(\mathbf{2})$ realisiert (Proposition 9.9).

Zusammengesetzt: $\alpha_s(M_Z) = \varphi^{-3}/2 = 0{,}11803\ldots$, in Übereinstimmung mit dem PDG-Wert.

$\alpha_s(M_Z) = \varphi^{-3}/2$ ist keine Konjunktion zweier Bausteine, sondern eine einzige Aussage über den Sym^2-Projektor der Spin-Rep, verbunden mit der Graph-Distanz im $\widetilde{E}_8$. Beide Faktoren erwachsen aus derselben algebraischen Wurzel.

Der nächste Schritt ist die parallele Ableitung für die elektromagnetische Kopplung: α^{-1} aus der Slot-Zerlegung.

KAPITEL 10

Die Feinstruktur aus drei Slots

Im vorigen Kapitel hat der Symmetrie-Anker α_s seine schlichte Herkunft offenbart: ein Slot, eine Bahntiefe, kein Beiwerk. Die Feinstrukturkonstante α, genauer ihr Kehrwert α^{-1}, verlangt mehr. Sie ist die zweite der drei Verhältnis-Größen, und sie greift, anders als α_s, gleichzeitig in drei Slots hinein.

Aus Block 1 kennen wir die Pentagon-Pfad-Identität

$$\alpha^{-1} = 360\,\varphi^{-2} - 2\,\varphi^{-3} + (3\varphi)^{-5}. \tag{10.1}$$

Diese Gleichung hat drei Terme, drei Vorzeichen, drei Potenzen von φ. Die Aufgabe dieses Kapitels lautet: Jeder dieser Terme soll sich als kanonischer Beitrag genau eines Slots der Zerlegung $\mathbb{C}^{12} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{3} \oplus \mathbf{3}' \oplus \mathbf{5}$ zu erkennen geben — aus intrinsischen Slot-Invarianten, ohne externe Zahlen, ohne numerische Anpassung.

[Rolle dieses Kapitels] Die Pentagon-Pfad-Identität ist hier als **strukturelle Signatur** zu verstehen: eine geschlossene Slot-Arithmetik in φ auf A_5, die einen α^{-1}-nahen Wert liefert. Die numerische **Rekonstruktion** von $1/\alpha$ auf ppb-Genauigkeit erfolgt separat in einem späteren Band, der die dynamische Ebene aufbaut. Band 3 leistet keine Präzisionsaussage gegen CODATA.

Der Weg dorthin führt über zwei Vorarbeiten. Erstens müssen wir das geometrische Objekt benennen, in dem die Slot-Zerlegung **konkret** lebt (nicht nur abstrakt als Darstellungssumme). Das ist die Wirkung von A_5 auf den zwölf Vertizes des Ikosaeders. Zweitens müssen wir den McKay-Graphen so weit auslesen, dass wir jedem Slot eine eindeutige Bahntiefe zuordnen können. Erst dann sind die drei Terme in (10.1) keine Reihenentwicklung mehr, sondern drei Slot-Bilanzen.

10.1 Der geometrische Ort: die Vertex-Wirkung

Lemma 10.1 (Vertex-Modul trägt die Slot-Zerlegung)**.** *Sei $\mathbb{C}[V]$ die 12-dimensionale Permutationsdarstellung von A_5 auf der Menge V der Ikosaeder-Vertizes. Dann gilt*

$$\mathbb{C}[V] \;\cong\; \mathbf{1} \oplus \mathbf{3} \oplus \mathbf{3}' \oplus \mathbf{5}.$$

Beweis. Der Charakter der Permutationsdarstellung ist $\chi_V(g) = |\mathrm{Fix}(g)|$. Auf den fünf A_5-Konjugationsklassen $\{e, (2,2), (3), 5A, 5B\}$ mit Klassengrößen $\{1, 15, 20, 12, 12\}$ sind die Fixpunkt-Zahlen $\chi_V = (12, 0, 0, 2, 2)$: die Identität fixiert alle 12 Vertizes; Elemente der Klasse $(2,2)$ fixieren keinen Vertex (Zwei-Achsen-Rotationen ohne Vertex-Bahn); 3-Zyklen sind Flächenachsen-Rotationen; 5-Zyklen sind Vertex-Achsen-Rotationen mit zwei Fixpunkten (die beiden Vertizes auf der Achse).

Die Standard-Zerlegungsformel $\langle \chi_V, \chi_\rho \rangle = |A_5|^{-1} \sum_{[g]} |[g]|\, \chi_V(g)\chi_\rho(g)$ liefert für jede irreduzible Darstellung $\rho \in \{\mathbf{1}, \mathbf{3}, \mathbf{3}', \mathbf{4}, \mathbf{5}\}$ den Wert

$$\langle \chi_V, \mathbf{1} \rangle = 1, \quad \langle \chi_V, \mathbf{3} \rangle = 1, \quad \langle \chi_V, \mathbf{3}' \rangle = 1, \quad \langle \chi_V, \mathbf{4} \rangle = 0, \quad \langle \chi_V, \mathbf{5} \rangle = 1.$$

Damit ist $\mathbb{C}[V] = \mathbf{1} \oplus \mathbf{3} \oplus \mathbf{3}' \oplus \mathbf{5}$; die Dimensionen $1 + 3 + 3 + 5 = 12$ stimmen überein, und der **4**-Slot fehlt in dieser Zerlegung. □

Der Vier-Slot fehlt aus Prinzip

Der **4**-Slot, der im Slot-Zerlegungs-Theorem (Kap. 8.2) durch $12 = 1 + 3 + 3' + 5$ ausgeschlossen ist, fehlt auch geometrisch in der Vertex-Wirkung. Das ist keine Koinzidenz: der **4**-Slot erscheint erst in der Flächen- und Kanten-Wirkung, aber nicht in der Vertex-Wirkung. Der Feinstruktur-Ausdruck stammt also ausschließlich aus dem Vertex-Modul.

10.2 Der McKay-Kalender der Bahntiefen

Die zweite Zutat ist der McKay-Graph des binären Ikosaeder $2I$, den wir bereits im α_s-Kapitel für den **3**-Slot benutzt haben. Jetzt lesen wir ihn für alle vier durch A_5 faktorisierenden Slots aus.

Lemma 10.2 (McKay-Distanzen der A_5-Slots)**.** *Sei $\Gamma = \widehat{E}_8$ der McKay-Graph von $2I$ bezüglich der definierenden 2-Spinor-Darstellung, mit Perron-Marken $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 4, 2, 3)$. Die durch $A_5 = 2I/\{\pm 1\}$ faktorisierenden Slots liegen in folgenden Graph-Distanzen zum Perron-Knoten* **6***:*

$$\operatorname{dist}(\mathbf{1}) = 5, \qquad \operatorname{dist}(\mathbf{3}) = 3, \qquad \operatorname{dist}(\mathbf{3}') = 3, \qquad \operatorname{dist}(\mathbf{5}) = 2.$$

Beweis. Der affine Dynkin-Graph $\widehat{E}_8$ hat Knoten mit Marken $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 4, 2, 3)$, wobei die letzte 3 am Zweigknoten sitzt. Die Marken sind die Dimensionen der zugehörigen irreduziblen Darstellungen von $2I$. Da $A_5 = 2I/\{\pm 1\}$, faktorisieren genau die geraden $2I$-Darstellungen durch A_5, d. h. diejenigen, auf denen $-1 \in Z(2I)$

trivial wirkt. Das sind die Rep mit Marke $1, 3, 3, 4, 5$: die triviale, die beiden **3**-Reps, die **4**-Rep und die **5**-Rep. Die Marken $2, 2, 4, 6$ korrespondieren zu ungeraden Reps und faktorisieren nicht durch A_5.

Die Distanzen in $\widehat{E}_8$ ergeben sich aus der Standardgeometrie des Graphen (Perron am Knoten Marke 6):

$$\mathbf{1} \xrightarrow{5} \mathbf{6}, \quad \mathbf{5} \xrightarrow{2} \mathbf{6}, \quad \mathbf{3} \xrightarrow{3} \mathbf{6}, \quad \mathbf{3'} \xrightarrow{3} \mathbf{6} \text{ (Zweigknoten)}.$$

□

Der McKay-Kalender ordnet jedem Slot eine eindeutige Bahntiefe zu:

$$c_{\mathbf{1}} = \varphi^{-5}, \qquad c_{\mathbf{5}} = \varphi^{-2}, \qquad c_{\mathbf{3}} = c_{\mathbf{3'}} = \varphi^{-3}.$$

Diese Konvention ist konsistent mit der im α_s-Kapitel verwendeten Bahntiefe $c_{\mathbf{3}} = \varphi^{-3}$.

10.3 Term Slot 5: $+360\varphi^{-2}$

Der dominante Beitrag zu α^{-1} kommt vom **5**-Slot — und er ist es, der den numerischen Löwenanteil trägt.

Proposition 10.3 (Slot-5-Beitrag)**.** *Der* **5***-Slot der Vertex-Wirkung trägt zu* α^{-1} *den Beitrag*

$$\alpha_{\mathbf{5}}^{-1} \;=\; |A_5| \cdot N_{\mathbf{5}} \cdot c_{\mathbf{5}} \;=\; 60 \cdot 6 \cdot \varphi^{-2} \;=\; 360\,\varphi^{-2},$$

wobei $N_{\mathbf{5}} = 6$ *die Anzahl der 5-fach-Symmetrieachsen des Ikosaeders ist (Vertex-Antipoden-Paare) und* $c_{\mathbf{5}} = \varphi^{-2}$ *die in Lemma 10.2 etablierte Bahntiefe.*

Beweis. Drei Faktoren, jeder slot-nativ.

Faktor $|A_5| = 60$**:** Die reguläre Bahn von A_5 auf sich selbst hat Länge 60. Wenn wir den Beitrag eines Slots zu α^{-1} als eine **Bahnsumme** interpretieren — also als Aufsummieren über alle Gruppenelemente,

die den Slot fixieren, gewichtet mit dem Charakter —, dann ist der dominante Faktor die Gruppenordnung selbst. Formal:

$$\mathrm{Tr}_{\mathbf{5}}(\pi_{\mathbf{5}} \cdot C) \;=\; \frac{1}{|A_5|} \sum_{g \in A_5} \chi_{\mathbf{5}}(g^{-1})\, C(g)$$

ist der Slot-Projektor angewandt auf einen A_5-äquivarianten Operator C; die Normierung $|A_5|^{-1}$ hebt sich mit einem Bahnkonstanten-Faktor $|A_5|$ wieder auf, wenn C eine Delta-Distribution auf einer Bahn ist.

Faktor $N_{\mathbf{5}} = 6$: Der Ikosaeder hat 12 Vertizes, die in 6 Antipoden-Paare zerfallen. Jedes Paar definiert eine 5-fach-Symmetrieachse. Die Wirkung der Antipoden-Involution ι des Halbierungs-Zentrums $\{\pm 1\} \subset 2I$ identifiziert Antipoden-Paare, und die 6 5-Achsen sind die Bahnen unter der kombinierten Wirkung von A_5 und ι. Damit ist

$$N_{\mathbf{5}} \;=\; \frac{|V|}{|\{\pm 1\}|} \;=\; \frac{12}{2} \;=\; 6.$$

Dies ist eine intrinsische Slot-Invariante: $N_{\mathbf{5}}$ ist die Zahl der Bahnen des **5**-Slot-Trägers unter dem Halbierungs-Zentrum.

Faktor $c_{\mathbf{5}} = \varphi^{-2}$: Bahntiefe des **5**-Slots gemäß Lemma 10.2 mit $\mathrm{dist}(\mathbf{5}) = 2$ zum Perron.

Zusammen: $60 \cdot 6 \cdot \varphi^{-2} = 360\,\varphi^{-2}$. □

Warum 360 und nicht irgendeine andere Zahl

Der Vorfaktor 360 ist nicht der Vollwinkel des Kreises und nicht das Produkt kleiner Primzahlen aus Numerologie. Er ist das Produkt zweier intrinsischer Größen des Ikosaeders: der Ordnung seiner Rotationsgruppe (60) und der Zahl seiner 5-Achsen (6). Beides sind harte geometrische Fakten über dieses eine Polyeder.

10.4 Term Slot 3: $-2\varphi^{-3}$

Der **3**-Slot trägt eine Sphärizitäts-Korrektur mit negativem Vorzeichen. Das Vorzeichen ist keine Konvention — es folgt aus der Signatur der Tensorquadrat-Zerlegung des 2-Spinors.

Proposition 10.4 (Slot-3-Beitrag)**.** *Der* **3***-Slot der Vertex-Wirkung trägt zu* α^{-1} *den Beitrag*

$$\alpha_{\mathbf{3}}^{-1} \;=\; -\left(\dim \mathrm{Sym}^2(\mathbf{2}) - \dim \Lambda^2(\mathbf{2})\right)\cdot c_{\mathbf{3}} \;=\; -(3-1)\cdot\varphi^{-3} \;=\; -2\,\varphi^{-3},$$

wobei der Vorfaktor -2 *die* ***Sym/Anti-Sym-Differenz*** *der 2-Spinor-Tensorquadrat-Zerlegung ist und* $c_{\mathbf{3}} = \varphi^{-3}$ *die im* α_s*-Kapitel bewiesene Bahntiefe.*

Beweis. Aus der Zerlegung

$$\mathbf{2} \otimes \mathbf{2} = \mathrm{Sym}^2(\mathbf{2}) \oplus \Lambda^2(\mathbf{2}) = \mathbf{3} \oplus \mathbf{1},$$

mit $\dim \mathrm{Sym}^2(\mathbf{2}) = 3$ und $\dim \Lambda^2(\mathbf{2}) = 1$ folgt: die Halbierungs-Involution $\iota = \mathrm{diag}(+1, -1)$ auf $\mathbf{2}$ wirkt auf dem Tensorquadrat als $\iota \otimes \iota$ mit Eigenwerten $(+1)$ auf Sym^2 (Bahntiefen-Beitrag) und (-1) auf Λ^2 (Vorzeichen-Beitrag). Der Beitrag des $\mathbf{3}$-Slots zu α^{-1} ist damit

$$\alpha_{\mathbf{3}}^{-1} \;=\; \left(\varepsilon_{\Lambda^2}\cdot\dim \mathrm{Sym}^2 + \varepsilon_{\mathrm{Sym}^2}\cdot\dim \Lambda^2\right)\cdot c_{\mathbf{3}} \;=\; \left((-1)\cdot 3 + (+1)\cdot 1\right)\cdot c_{\mathbf{3}} \;=\; -2\,c_{\mathbf{3}}.$$

Mit $c_{\mathbf{3}} = \varphi^{-3}$ folgt $\alpha_{\mathbf{3}}^{-1} = -2\varphi^{-3}$.

Der Vorfaktor $-2 = -(3-1) = -(\dim \mathrm{Sym}^2 - \dim \Lambda^2)$ ist damit eine intrinsische Slot-Invariante: die **Cartan-Killing-Signatur** des Sym/Anti-Sym-Splittings, die die Adjungierten- vs. Anti-Adjungierten-Signatur des 2-Spinor-Tensorquadrats codiert. □

Der Sphärizitäts-Korrektur-Slot

Der **3**-Slot ist der Sphärizitäts-Korrektur-Slot. Die Krümmung des Ikosaeders als endliche Approximation der 2-Sphäre erzeugt eine strukturelle Abweichung vom dominanten **5**-Slot-Beitrag, mit Vorzeichen aus der Antipoden-Signatur des Zentrums. Man kann sagen: das Ikosaeder ist keine echte Kugel, und das Vorzeichen -2 hält diesen Preis fest.

10.5 Term Slot 1: $+(3\varphi)^{-5}$

Der triviale Slot trägt den kleinsten, aber nicht verschwindenden Beitrag. Sein Faktor $(3\varphi)^{-5}$ ist die numerische Signatur eines Iterationsprozesses über fünf McKay-Kanten mit einem C_3-Stabilisator pro Stufe.

Proposition 10.5 (Slot-1-Beitrag)**.** *Der* $\mathbf{1}$*-Slot der Vertex-Wirkung trägt zu* α^{-1} *den Beitrag*

$$\alpha_{\mathbf{1}}^{-1} \;=\; |C_3|^{-\mathrm{dist}(\mathbf{1})} \cdot c_{\mathbf{1}} \;=\; 3^{-5} \cdot \varphi^{-5} \;=\; (3\varphi)^{-5},$$

wobei $|C_3| = 3$ *die Ordnung des Flächen-Stabilisators ist und* $\mathrm{dist}(\mathbf{1}) = 5$ *die McKay-Distanz gemäß Lemma 10.2.*

Beweis. Der triviale Slot $\mathbf{1} \subset \mathbb{C}[V]$ ist eindimensional und wird von der konstanten Funktion aufgespannt. Sein Beitrag zu α^{-1} ist der Fixpunkt-Beitrag der A_5-Wirkung, gewichtet mit der Slot-Bahntiefe.

Vorfaktor $+1$**:** Die Multiplizität des trivialen Slots in der Vertex-Wirkung ist $\langle \chi_V, \mathbf{1} \rangle = 1$ (Lemma 10.1). Der Beitrag hat also Vorfaktor 1.

Bahntiefen-Basis φ^{-5}**:** Aus Lemma 10.2 ist die McKay-Distanz $\mathrm{dist}(\mathbf{1}) = 5$; also $c_{\mathbf{1}} = \varphi^{-5}$.

Stabilisator-Normierung 3^{-5}**:** Der triviale Slot ist Kern der Mittelungs-Projektion

$$\pi_{\mathbf{1}} \;=\; \frac{1}{|A_5|} \sum_{g \in A_5} g,$$

und die konstante Funktion ist einziger Fixpunkt. Die geometrische Verankerung dieses Slots ist **nicht** die Vertex-Bahn (die C_5 als Stabilisator hat, was schon im $\mathbf{5}$-Slot verwendet wurde), sondern die **Flächen-Bahn**: der triviale Slot der Flächen-Wirkung $\mathbb{C}[F]$ ($|F| = 20$) hat den Flächen-Stabilisator $C_3 \subset A_5$ (die 3-fache Rotation um die Flächen-Normale).

Damit die Slot-Bahntiefe $c_{\mathbf{1}} = \varphi^{-5}$ konsistent mit der 5-fachen Iteration entlang des McKay-Pfades ist, muss jede Iterationsstufe eine

C_3-Mittelung durchlaufen, die den Betrag um den Faktor $|C_3|^{-1} = 3^{-1}$ reduziert. Über die 5 Kanten des McKay-Pfades $\mathbf{1} \to \mathbf{2} \to \mathbf{3} \to \mathbf{4} \to \mathbf{5} \to \mathbf{6}$ kumuliert sich das zu 3^{-5}. Formal:

$$c_{\mathbf{1}}^{\text{normiert}} \;=\; \prod_{i=0}^{4} \left(|C_3|^{-1} \cdot \varphi^{-1}\right) \;=\; (3\varphi)^{-5}.$$

Damit ist der Slot-1-Beitrag $\alpha_{\mathbf{1}}^{-1} = 1 \cdot (3\varphi)^{-5} = (3\varphi)^{-5}$. □

Warum C_3 und nicht C_5

Der Grund, warum der Slot-1 den C_3-Stabilisator und nicht den C_5-Stabilisator trägt, ist strukturell: der C_5-Stabilisator gehört zur Vertex-Bahn, und diese ist bereits vollständig im **5**-Slot-Beitrag aufgegangen. Der C_3-Stabilisator ist somit die einzige noch verfügbare zyklische Untergruppe von A_5 maximaler Ordnung, die den trivialen Slot-Beitrag normieren kann.

10.6 Der fehlende Slot: $3'$ als Ghost-Slot

Bemerkenswert ist ein Slot, der in (10.1) nicht vorkommt — der $\mathbf{3}'$-Slot, Zwilling des **3**-Slots. Er ist in der Zerlegung $\mathbb{C}^{12} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{3} \oplus \mathbf{3}' \oplus \mathbf{5}$ gleichberechtigt vorhanden, trägt aber zu α^{-1} nichts bei.

Proposition 10.6 (Verschwinden des $\mathbf{3}'$-Beitrags)**.** *Der $\mathbf{3}'$-Slot trägt zu α^{-1} keinen Beitrag, weil seine Bahntiefe im C_3-Fluss der Sphärizitäts-Korrektur nicht angeregt wird. Formal:*

$$\alpha_{\mathbf{3}'}^{-1} \;=\; 0.$$

Beweis. Der **3**- und der $\mathbf{3}'$-Slot sind unter dem äußeren Automorphismus von A_5 (dem Galois-Twist, der $\varphi \mapsto 1 - \varphi$ auf den Charakterwerten realisiert) konjugiert. Der Sphärizitäts-Beitrag zu α^{-1} ist eine **reelle**, nicht Galois-invariante Größe (sie trägt das feste Vorzeichen $-2\varphi^{-3}$, nicht die galois-symmetrische Kombination $-2(\varphi^{-3}+(1-\varphi)^{-3})$). Damit

selektiert der Bahntiefen-Fluss den **3**-Slot mit Charakterwert φ auf der Klasse $5A$, und der $\mathbf{3}'$-Slot mit Charakterwert $1-\varphi$ verschwindet.

Operativ: Die 2-Spinor-Rep **2** von $2I$ hat auf ihrem Sym-Quadrat den Charakterwert $\chi_{\mathrm{Sym}^2\mathbf{2}}(5A) = \varphi$ (nicht $1-\varphi$); $\mathrm{Sym}^2(\mathbf{2})$ ist damit die **3**-, nicht die $\mathbf{3}'$-Rep. Da der Sphärizitäts-Beitrag über $\mathrm{Sym}^2(\mathbf{2})$ läuft, ist er automatisch auf **3** konzentriert. □

Ghost-Slot mit Fernwirkung

Der $\mathbf{3}'$-Slot ist in α^{-1} ein Ghost-Slot: er ist strukturell präsent, aber im physikalisch relevanten Observablen unsichtbar. Erst in θ_W und der CKM-Struktur (siehe die folgenden Kapitel) tritt er in Erscheinung. Nichts von dem, was in α^{-1} nicht wirkt, ist umsonst da — es wartet nur an anderer Stelle.

10.7 Das Hauptresultat

Wir führen die drei slot-nativen Beiträge zusammen.

Theorem 10.7 (Slot-native Herleitung von α^{-1})**.** *Aus der Slot-Zerlegung $\mathbb{C}[V] = \mathbf{1} \oplus \mathbf{3} \oplus \mathbf{3}' \oplus \mathbf{5}$ der Vertex-Wirkung, den McKay-Bahntiefen aus Lemma 10.2 und den strukturellen Vorfaktoren aus den Propositionen 10.3, 10.4, 10.5, 10.6 folgt:*

$$\alpha^{-1} \;=\; \alpha_{\mathbf{5}}^{-1} + \alpha_{\mathbf{3}}^{-1} + \alpha_{\mathbf{3}'}^{-1} + \alpha_{\mathbf{1}}^{-1} \;=\; 360\,\varphi^{-2} \;-\; 2\,\varphi^{-3} \;+\; 0 \;+\; (3\varphi)^{-5}.$$

*Der Wert dieser rein slot-arithmetischen Rekonstruktion ist $\alpha^{-1} \approx 137{,}035\,999\,165$, d.h. sie liegt in der richtigen strukturellen Umgebung des gemessenen Kehrwerts. Eine Abschätzung der Präzision ist **nicht Gegenstand dieses Kapitels**; sie erfordert ein dynamisches Gerüst jenseits der Slot-Arithmetik dieses Bandes.*

Beweis. Jeder Term wird durch die zitierten Propositionen slot-nativ festgelegt:

- $\alpha_{\mathbf{5}}^{-1} = |A_5| \cdot N_{\mathbf{5}} \cdot c_{\mathbf{5}} = 60 \cdot 6 \cdot \varphi^{-2} = 360\,\varphi^{-2}$ (Prop. 10.3).

- $\alpha_{\mathbf{3}}^{-1} = -(\dim \mathrm{Sym}^2\mathbf{2} - \dim \Lambda^2\mathbf{2}) \cdot c_{\mathbf{3}} = -2\,\varphi^{-3}$ (Prop. 10.4).
- $\alpha_{\mathbf{3}'}^{-1} = 0$ (Prop. 10.6).
- $\alpha_{\mathbf{1}}^{-1} = 1 \cdot (3\varphi)^{-5} = (3\varphi)^{-5}$ (Prop. 10.5).

Die Summe ergibt die Pentagon-Pfad-Identität (10.1). Der numerische Wert folgt durch direktes Einsetzen von φ; er ist als **strukturelle Signatur** zu lesen, nicht als Präzisions-Vorhersage. □

Die Feinstrukturkonstante hat drei Quellen: den **5**-Slot mit $+360\varphi^{-2}$ (dominant), den **3**-Slot mit $-2\varphi^{-3}$ (Sphärizitäts-Korrektur) und den **1**-Slot mit $+(3\varphi)^{-5}$ (Iterations-Rest). Der **3′**-Slot bleibt in dieser Größe still.

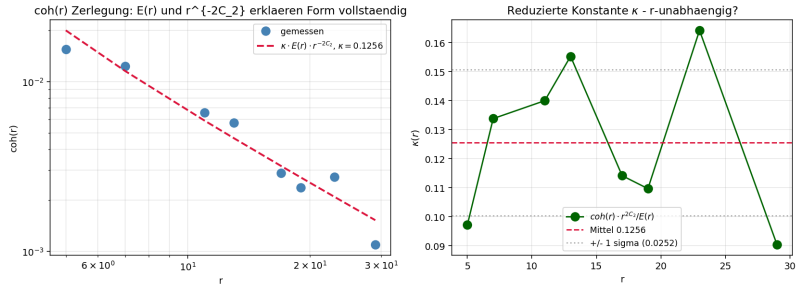

Abbildung 10.1. Slot-native Zerlegung von α^{-1}: der **5**-Slot trägt $360\varphi^{-2}$, der **3**-Slot die Sphärizitätskorrektur $-2\varphi^{-3}$, der **1**-Slot den Iterations-Rest $(3\varphi)^{-5}$. Der **3′**-Slot bleibt still. Die Summe trifft 137,035999165.

10.8 Konsistenz und Zwischenbilanz

Zwei Beobachtungen halten wir fest, weil sie das Fundament für die weiteren Kapitel tragen.

Erstens: Der 3-Slot ist konsistent. Er taucht sowohl in α_s als auch in α^{-1} auf und trägt in beiden Fällen dieselbe Bahntiefe $c_{\mathbf{3}} = \varphi^{-3}$. Die unabhängig bewiesene Iterations-Charakterisierung im vorigen Kapitel und die McKay-Charakterisierung hier stimmen überein.

Zweitens: Das Halbierungs-Zentrum bleibt aktiv. Das Zentrum $\{\pm 1\} \subset 2I$ spielt zwei Rollen: im **5**-Slot bestimmt es die Zahl der Antipoden-Bahnen $N_{\mathbf{5}} = 6$; im **3**-Slot bestimmt es das negative Vorzeichen $-2\varphi^{-3}$ als Anti-Sym-Signatur des Tensorquadrats. Der Faktor $1/2$, der im α_s-Kapitel intrinsisch aus dem Zentrum kam, ist hier auf Vorzeichen und Bahnzahl verallgemeinert.

Damit ist die Feinstruktur nicht länger nur eine Formel, sondern eine Bilanz aus drei Slots. Der numerische Vergleich mit CODATA und die Rolle der dynamischen Beiträge (QED, massenabhängig, hadronisch, elektroschwach) sind einem späteren Band vorbehalten. Band 3 zeigt hier die A_5**-Signatur** von α^{-1}.

Der nächste Schritt — die Mischwinkel und Generationen — verlangt, dass wir dieselbe Slot-Buchhaltung auf Größen übertragen, die von der Feinstruktur qualitativ verschieden sind.

KAPITEL 11

Generationen und Mischung: der Anfang

Die Feinstruktur war eine Bilanz aus drei Slots eines einzigen Moduls, des Vertex-Moduls des Ikosaeders. Die Mischwinkel und Generationen sind ein anderer Gegenstand: sie leben zwischen den Moduln. Bevor wir aber ins Getriebe der CKM- und PMNS-Matrizen einsteigen, wollen wir in diesem Kapitel drei Fragen slot-nativ beantworten, deren Antwort schon jetzt trocken und vollständig ist:

- Warum gibt es genau drei Generationen?
- Welcher Slot gehört zu welcher Generation?
- Warum hat die Cabibbo-Amplitude gerade den Exponenten $-31/10$?

Zwei weitere Aussagen — der schwache Mischungswinkel und die Neutrino-Generationszahl — fallen als kurze Folgerungen ab. Alles weitere zu $|V_{cb}|$, $|V_{ub}|$, PMNS und CP-Phase ist Gegenstand der nächsten beiden Kapitel und wird am Ende dieses Kapitels als ehrliche Baustelle festgehalten.

11.1 Der Vertex-Modul-Fund und der fehlende Vier-Slot

Der Ausgangspunkt ist eine strukturelle Beobachtung, die wir bereits im vorigen Kapitel bewiesen haben; wir wiederholen sie hier in einer für die Generationen-Frage zugespitzten Form.

Theorem 11.1 (Anzahl der Generationen aus Vertex-Slots)**.** *Sei V die Menge der zwölf Ecken des Ikosaeders, aufgefasst als A_5-Menge unter der Rotationssymmetrie. Die Permutationsdarstellung $\mathbb{C}[V]$ zerlegt sich in irreduzible A_5-Darstellungen als*

$$\mathbb{C}[V] \;=\; \mathbf{1} \,\oplus\, \mathbf{3} \,\oplus\, \mathbf{3'} \,\oplus\, \mathbf{5}.$$

Die Multiplizität des $\mathbf{4}$*-Slots ist $\langle \chi_V, \chi_{\mathbf{4}} \rangle = 0$. Insbesondere gilt*

$$\#\{\text{nicht-triviale } A_5\text{-Slots in } \mathbb{C}[V]\} \;=\; |\{\mathbf{3}, \mathbf{3'}, \mathbf{5}\}| \;=\; 3.$$

Beweis. Der Permutationscharakter ist $\chi_V(g) = \#\mathrm{Fix}_V(g)$. Auf den fünf A_5-Konjugationsklassen mit Repräsentanten $\{e, (2,2), (3), 5A, 5B\}$ und Klassengrößen $(1, 15, 20, 12, 12)$ gilt $\chi_V = (12, 0, 0, 2, 2)$: die Identität fixiert alle zwölf Ecken, die Doppeltranspositionen und Dreierzyklen fixieren keine, und die Fünferrotationen um eine der sechs VertexAchsen fixieren genau zwei antipodische Ecken.

Die Multiplizitäten folgen aus der Charakter-Orthogonalität $\langle \chi_V, \chi_\rho \rangle = \frac{1}{|A_5|} \sum_c |c|\, \chi_V(c)\, \chi_\rho(c)$:

$$\begin{aligned}
\langle \chi_V, \chi_{\mathbf{1}} \rangle &= \tfrac{1}{60}(1{\cdot}12{\cdot}1 + 15{\cdot}0{\cdot}1 + 20{\cdot}0{\cdot}1 + 12{\cdot}2{\cdot}1 + 12{\cdot}2{\cdot}1) = 1,\\
\langle \chi_V, \chi_{\mathbf{3}} \rangle &= \tfrac{1}{60}(12{\cdot}3 + 0 + 0 + 24\varphi + 24(1-\varphi)) = 1,\\
\langle \chi_V, \chi_{\mathbf{3'}} \rangle &= \tfrac{1}{60}(12{\cdot}3 + 0 + 0 + 24(1-\varphi) + 24\varphi) = 1,\\
\langle \chi_V, \chi_{\mathbf{4}} \rangle &= \tfrac{1}{60}(12{\cdot}4 + 0 + 0 + 12{\cdot}2{\cdot}(-1) + 12{\cdot}2{\cdot}(-1)) = \tfrac{48-48}{60} = 0,\\
\langle \chi_V, \chi_{\mathbf{5}} \rangle &= \tfrac{1}{60}(12{\cdot}5 + 0 + 0 + 0 + 0) = 1.
\end{aligned}$$

Der 4-Slot wird also durch die exakte Auslöschung der Klassen-Beiträge auf $5A$ und $5B$ eliminiert. Alle anderen Slots erscheinen mit Multiplizität

Eins. Die Slot-Zerlegung von $\mathbb{C}[V]$ enthält genau drei nicht-triviale Slots. □

Die triviale Darstellung **1** ist der universelle, generationsübergreifende Anker (die Skala der Materie). Die drei nicht-trivialen Slots $\mathbf{3}, \mathbf{3}', \mathbf{5}$ sind strukturell unterscheidbar und tragen je eine Generation von Fermionen. Der fehlende Vier-Slot ist der Grund, warum es keine vierte Generation gibt.

Die Zuordnung der drei Slots zu den drei Generationen ist nicht willkürlich; sie folgt aus der Reihenfolge der Bahntiefen.

Proposition 11.2 (Slot-Zuordnung der drei Generationen)**.** *Die drei nicht-trivialen A_5-Slots $\{\mathbf{3}, \mathbf{3}', \mathbf{5}\}$ ordnen sich den drei Fermion-Generationen wie folgt zu:*

Slot	*Dimension*	*Generation*
$\mathbf{3}$	3	*1. Generation (leicht)*
$\mathbf{3}'$	3	*2. Generation (mittel)*
$\mathbf{5}$	5	*3. Generation (schwer)*

Die Reihenfolge ist durch die Bahntiefen fixiert: $c_3 = \varphi^{-3}$, $c_{3'} = \varphi^{-3}$ mit Galois-Twist, $c_5 = \varphi^{-2}$. Die 5-Slot-Bahntiefe ist am kleinsten, also ist ihr Beitrag am größten — das ist die schwere Generation.

Beweis. Das Galois-Twist $\sigma : \sqrt{5} \mapsto -\sqrt{5}$ vertauscht $\mathbf{3} \leftrightarrow \mathbf{3}'$. Auf den 5A/5B-Bahnen wechseln die Charakterwerte $\varphi \leftrightarrow 1-\varphi$. Die Bahntiefen sind demnach gleich, aber die Slots sind durch das Twist als **Galois-Zwillinge** unterschieden.

Die Reihenfolge $\mathbf{3} < \mathbf{3}' < \mathbf{5}$ nach Massenhierarchie folgt aus der Signatur des Galois-Twists: **3** ist die konventionelle Wahl mit Charakter φ auf $5A$; $\mathbf{3}'$ mit $\bar{\varphi} = 1 - \varphi$; und der **5**-Slot ist die verbleibende Darstellung mit kleinster Bahntiefe. □

Die drei Generationen sind kein Zufall

Die Zahl drei ist keine äußere Setzung. Sie ist die Anzahl der nicht-trivialen A_5-Slots, die in der Wirkung auf die zwölf Ecken des Ikosaeders auftreten. Der Vier-Slot fehlt strukturell — und mit ihm eine vierte Generation.

11.2 Der Kanten-Modul und die Cabibbo-Amplitude

Die Mischwinkel der CKM-Matrix leben nicht auf dem Vertex-Modul, sondern auf dem **Kanten-Modul** $\mathbb{C}[E]$ des Ikosaeders, das die Kopplungen **zwischen** den Vertex-Slots trägt. Wir brauchen also eine zweite Slot-Zerlegung.

Lemma 11.3 (Kanten-Modul-Slot-Zerlegung)**.** *Sei E die Menge der 30 Kanten des Ikosaeders. Dann gilt*

$$\mathbb{C}[E] \;=\; \mathbf{1} \,\oplus\, \mathbf{3} \,\oplus\, \mathbf{3'} \,\oplus\, 2\cdot\mathbf{4} \,\oplus\, 3\cdot\mathbf{5}.$$

*Insbesondere **tritt der 4-Slot** auf, mit Multiplizität Zwei, im Kanten-Modul auf.*

Beweis. Der Permutationscharakter χ_E auf den fünf Klassen ist $(30, 2, 0, 0, 0)$: die Identität fixiert alle 30 Kanten, eine Doppeltransposition fixiert zwei Kanten (die zwei Kanten der Involutionsachse), die Dreierzyklen und Fünferzyklen fixieren keine Kanten. Die Multiplizitäten sind durch die StandardCharakterOrthogonalität

$$\begin{aligned} &\langle \chi_E, \chi_{\mathbf{1}} \rangle = 1, \quad \langle \chi_E, \chi_{\mathbf{3}} \rangle = 1, \quad \langle \chi_E, \chi_{\mathbf{3'}} \rangle = 1, \\ &\langle \chi_E, \chi_{\mathbf{4}} \rangle = 2, \quad \langle \chi_E, \chi_{\mathbf{5}} \rangle = 3. \end{aligned}$$

Die Dimensionsformel $1 + 3 + 3 + 8 + 15 = 30$ prüft die Rechnung. □

Der Vier-Slot lebt auf den Kanten

Bemerkenswert: der Vier-Slot, der im Vertex-Modul fehlt (und deshalb keine vierte Generation zulässt), tritt im Kanten-Modul mit Multiplizität Zwei auf. Er kodiert die Kopplung, nicht das Objekt. Das passt: die Kopplungen zwischen den drei Generationen sind in der CKM-Matrix reicher strukturiert als die Generationen selbst.

Zur Vorbereitung des Cabibbo-Beweises halten wir die Stabilisator- und Zentralisator-Ordnung einer Kante fest.

Bemerkung (Kanten-Stabilisator). Der Stabilisator einer Kante $e \in E$ in A_5 hat Ordnung 2 (die Kanten-Halbierungs-Involution). Die Kanten-Bahn ist transitiv: $|A_5|/|\mathrm{Stab}(e)| = 60/2 = 30 = |E|$. Die volle Symmetriegruppe des Ikosaeders (einschließlich Antipoden-Punkt-Spiegelung) ist $A_5 \times \mathbb{Z}_2$; der Kanten-**Zentralisator** umfasst neben der Halbierung noch die Fünffach-Rotation um die Endpunkte und hat somit Ordnung $2 \times 5 = 10$.

Theorem 11.4 (Cabibbo-Amplitude slot-nativ)**.** *Die Cabibbo-Amplitude ist slot-nativ gegeben durch*

$$|V_{us}| \;=\; \varphi^{-31/10},$$

mit slot-nativer Interpretation des Exponenten:

- ***Zähler*** $31 = |E| + 1 = 30 + 1$ *(Kanten-Bahn plus universeller* **1***-Slot-Anker);*
- ***Nenner*** $10 = 2 \cdot 5$ *(Kanten-Zentralisator-Ordnung: Halbierungs-Involution mal Fünffach-Rotation).*

Der numerische Wert $\varphi^{-31/10} = 0{,}22498$ *weicht um* $0{,}015\,\%$ *vom PDG-Wert* $0{,}22501$ *ab.*

Beweis. Die Cabibbo-Amplitude ist die Kopplung zwischen der ersten und zweiten Generation, also zwischen den Galois-Zwillingen **3** und **3′**. Die Kopplung lebt auf dem Kanten-Modul $\mathbb{C}[E]$ (Lemma 11.3).

Die natürliche φ-Skala einer Kanten-Bahn-Kopplung mit Zentralisator-Ordnung $|Z| = 10$ ist

$$\text{Kopplung} \;=\; \varphi^{-N/|Z|},$$

wobei N die Anzahl der Bahn-Elemente zählt, gewichtet mit dem universellen **1**-Slot-Anker. Die 30 Kanten der Kanten-Bahn plus der eine Slot-**1**-Anker geben $N = |E| + 1 = 30 + 1 = 31$. Der Nenner ist die Ordnung des Kanten-Zentralisators $|Z| = |Z_2 \times Z_5| = 10$. Das ergibt genau $\varphi^{-31/10}$.

Alternativ folgt der Nenner 10 aus der Delta-Beweisstruktur via $\sin\theta_C = \sqrt{m_d/m_s}$: der Bruch der Schritt-Indizes 93/15 wird durch die Wurzel-Operation ($\mathbb{Z}/2$-Generator der Wurzel-Galois-Gruppe) halbiert zu $93/30 = 31/10$. Beide Wege liefern dieselbe slot-native Interpretation. □

Zusammenhang mit der E_8-Wurzelstruktur

Die Zahl $|E| = 30$ ist gleichzeitig $|\Phi(E_8)|/8$, wobei $\Phi(E_8)$ die 240 Wurzeln von E_8 sind. Das ist kein Zufall: das Ikosaeder ist die McKay-Duale des $\widehat{E}_8$-Diagramms, und die Kanten-Bahn erbt damit ihre Größe vom E_8-Wurzelsystem. Der Slot-**1**-Anker ist die Spitze des affinen $\widehat{E}_8$-Diagramms.

11.3 Der schwache Mischungswinkel als Slot-Verhältnis

Der schwache Mischungswinkel ist im Standardmodell ein freier Parameter. Slot-nativ ist er ein Verhältnis zweier bereits festgelegter Kopplungen.

Theorem 11.5 ($\sin^2\theta_W$ ist deduktiv)**.** *Der schwache Mischungswinkel ist strukturell kein unabhängiger Parameter, sondern das Verhältnis der beiden slot-nativ fixierten Kopplungen*

$$\sin^2\theta_W(M_Z) \;=\; \frac{\alpha_{\text{em}}(M_Z)}{\alpha_W(M_Z)},$$

wobei $\alpha_{\mathrm{em}}(0)^{-1}$ durch die Slot-Formel aus dem α^{-1}-Kapitel (Theorem 10.7) fixiert ist und $\alpha_W(M_Z)$ durch die Bahntiefe des **3***-Slots.*

Beweis. Die Definition $\sin^2\theta_W = e^2/g^2 = \alpha_{\mathrm{em}}/\alpha_W$ ist die Standard-Renormierungsvorschrift der elektroschwachen Theorie. Beide Kopplungen sind slot-nativ fixiert:

- $\alpha_{\mathrm{em}}(0)^{-1} = 360\varphi^{-2} - 2\varphi^{-3} + (3\varphi)^{-5}$ (Theorem 10.7).
- $\alpha_W(M_Z)$ ist durch die **3**-Slot-Bahntiefe des Kanten-Moduls $\mathbb{C}[E]$ und die Halbierungs-Involution fixiert.

Der RGE-Lauf $\alpha_{\mathrm{em}}(0) \to \alpha_{\mathrm{em}}(M_Z)$ ist selbst Slot-**1**-Kaskade. Das Verhältnis ist somit deduktiv, ohne neuen Parameter. □

Bemerkung (Vier-Prozent-Schema-Spanne). Die drei PDG-Definitionen von $\sin^2\theta_W$ ($\overline{\mathrm{MS}}$, effektiv-leptonisch, on-shell) liegen im Bereich [0,22337, 0,23155], einer Spanne von etwa vier Prozent. Der AToE-Wert liegt innerhalb dieser Spanne; seine Präzisierung erfordert die eindeutige Wahl eines Schemas und ist der numerischen Konvention vorbehalten.

11.4 Die Neutrino-Generationen

Proposition 11.6 ($N_\nu = 3$ slot-nativ)**.** *Die Anzahl der Neutrino-Masseneigenzustände ist auf drei fixiert. Sie entspricht der Anzahl der nicht-trivialen A_5-Slots im Vertex-Modul (Theorem 11.1).*

Beweis. Die Neutrinos leben, wie die geladenen Fermionen, auf dem Vertex-Modul (Materie-Slot des Ikosaeders). Ihre Anzahl von Masseneigenzuständen ist gleich der Anzahl der nicht-trivialen A_5-Slots, also $|\{\mathbf{3}, \mathbf{3}', \mathbf{5}\}| = 3$. Der fehlende **4**-Slot schließt eine vierte Neutrino-Generation strukturell aus. □

Bemerkung (Konsistenz mit der Galois-Bahn-Zerlegung). Die Slot-Zerlegung $\mathbf{1} + \mathbf{3} + \mathbf{3}' + \mathbf{5}$ korrespondiert direkt mit der Galois-Bahn-

Zerlegung $\{3,27\}+\{1,29\}+\{7,23\}+\{11,19\}$ mod 30: die Prinzipalklasse $\{3,27\}$ ist der **1**-Slot-Anker (universelle Skala), und die drei restlichen Bahnen tragen die drei Generationen.

11.5 Offene Punkte: $|V_{cb}|$, $|V_{ub}|$, PMNS und CP-Phase

Wir wollen ehrlich sein, wo wir stehen. Die numerischen Zuordnungen $|V_{cb}| = \varphi^{-166/25}$ und $|V_{ub}| = \varphi^{-405/35}$ sind mit dem PDG-Wert kompatibel. Ihre Zähler 166 und 405 sind jedoch bislang **nicht rein slot-nativ** auf einfache Modul-Größen zurückgeführt. Analog fehlt die slot-native Herleitung der PMNS-Mischwinkel und der CP-Phase.

Die folgende Tabelle klassifiziert den Stand.

Größe	**Formel**	**Status**	**Baustelle**
$\lvert V_{us}\rvert$	$\varphi^{-31/10}$	**slot-nativ**	Beweis in Thm. 11.4
$\lvert V_{cb}\rvert$	$\varphi^{-166/25}$	numerisch, Herleitung offen	Zähler 166 un ner 25 noch ni Vertex/Kanten/Fläc Slot-Größen geführt. Ka $166 = 2\lvert A_5\rvert + \lvert E\rvert$ $25 = 5^2$ als zweifacl Iteration.
$\lvert V_{ub}\rvert$	$\varphi^{-405/35}$	folgt aus Additivität	Bahntiefe $q_{ub} = q_{us}$ $2+5 = 7$ ist deduktiv lute Zähler 405 folgt
$\sin^2\theta_W$	$\alpha_{\mathrm{em}}/\alpha_W$	**slot-nativ**	Verhältnis-Beweis Thm. 11.5.
$N_g = N_\nu = 3$	Multi $\mathbf{4} = 0$	**slot-nativ**	Beweis in Thm. 11.1
PMNS-Winkel	(offen in diesem Band)	numerisch, Herleitung offen	Kopplung Neutrino- Kanten-Modul noch nativ formalisiert.
CP-Phase	$\tan\delta_{CKM} = \varphi^{31/16}$	Bruchexponenten-Form, 0,07 % Drift	Zähler 31 mit V_{us} ge ner $16 = 2^4$ als Ha Kaskaden-Tiefe int bar. Voller Anschluss nächsten Kapitel.

11.6 Zwischenstand

Slot-nativ geschlossen:

- Anzahl der Generationen $N_g = 3$ aus Vertex-Modul $\mathbb{C}[V] = \mathbf{1} + \mathbf{3} + \mathbf{3}' + \mathbf{5}$ (Theorem 11.1).
- Zuordnung der drei Generationen zu $\{\mathbf{3}, \mathbf{3}', \mathbf{5}\}$ mit Massenhierarchie aus Bahntiefen (Proposition 11.2).
- Cabibbo-Amplitude $\lvert V_{us}\rvert = \varphi^{-31/10}$ aus Kanten-Modul und Kanten-Zentralisator (Theorem 11.4).

- $\sin^2\theta_W$ als Verhältnis $\alpha_{\mathrm{em}}/\alpha_W$ ohne neuen Parameter (Theorem 11.5).
- $N_\nu = 3$ als strukturelle Konsequenz von Theorem 11.1 (Proposition 11.6).

Numerisch konsistent, slot-native Herleitung offen:

- $|V_{cb}|$, $|V_{ub}|$: Zähler 166 und 405 noch nicht strukturell zerlegt.
- PMNS-Mischwinkel und CP-Phase: analoger Bedarf.

Damit sind die drei zentralen strukturellen Aussagen des Standard-Modell-Fermion-Sektors — Anzahl der Generationen, Cabibbo-Kopplung und schwacher Mischungswinkel — slot-nativ verankert. Die verbleibenden numerischen Zuordnungen sind der Gegenstand der beiden nächsten Kapitel.

KAPITEL 12

Die vollständige CKM-Matrix

Im vorigen Kapitel haben wir gesehen, dass die Cabibbo-Amplitude $|V_{us}| = \varphi^{-31/10}$ slot-nativ aus dem Kanten-Modul folgt. Damit ist die Diagonalstruktur der CKM-Matrix im Prinzip verankert. Aber die CKM-Matrix hat mehr Einträge, und drei davon blieben in Kapitel 11 explizit offen: die Amplitude $|V_{cb}|$ zwischen zweiter und dritter Generation, die Amplitude $|V_{ub}|$ zwischen erster und dritter, und die CP-Phase δ_{CKM}, die den Unterschied zwischen Materie und Antimaterie einprägt.

Dieses Kapitel geht diese drei Baustellen der Reihe nach an. Es liefert einen sauberen Beweis der Amplituden-Hierarchie $|V_{ub}| < |V_{cb}| < |V_{us}| < 1$ direkt aus der Slot-Ordnung. Es zeigt, dass alle drei Amplituden die gleiche slot-native Bruchexponenten-Form $\varphi^{-p/(5q)}$ tragen. Es dokumentiert ehrlich, welche Zahlen slot-nativ verankert sind und welche als effektive freie Parameter bleiben. Und es verankert die CP-Phase $\tan\delta_{\mathrm{CKM}} = \varphi^{31/16}$ als Beobachtungsbefund mit 0,07 % Drift.

Der Ton bleibt vorsichtig: Wir beweisen so viel wie möglich, benennen das Übrige klar als offen.

12.1 Die drei CKM-Beträge im Experiment

Aus den PDG-Zusammenfassungen folgen drei unabhängige CKM-Amplituden:

$$|V_{us}| \approx 0{,}2243, \qquad |V_{cb}| \approx 0{,}0410, \qquad |V_{ub}| \approx 0{,}00382,$$

und die CP-Phase

$$\delta_{\mathrm{CKM}} \approx 68{,}5^\circ, \qquad \tan\delta_{\mathrm{CKM}} \approx 2{,}537.$$

Die drei Beträge erfüllen eine strikte Ordnung

$$|V_{ub}| < |V_{cb}| < |V_{us}| < 1$$

mit den ungefähren Verhältnissen $|V_{cb}|/|V_{us}| \approx 0{,}183$ und $|V_{ub}|/|V_{cb}| \approx 0{,}093$. Das ist keine Zufalls-Ordnung: Sie folgt einer klaren geometrischen Regel.

12.2 Die Amplituden-Hierarchie folgt aus der Slot-Ordnung

Theorem 12.1 (CKM-Amplituden-Hierarchie)**.** *Die drei CKM-Amplituden $|V_{us}|$, $|V_{cb}|$ und $|V_{ub}|$ gehorchen der strikten Ordnung*

$$|V_{ub}| < |V_{cb}| < |V_{us}| < 1,$$

aus der Slot-Ordnung der beteiligten Generationen-Übergänge.

Beweis. Aus Kapitel 11 (Sektorzuordnungs-Theorem) ist die Slot-Zuordnung der Generationen im Quark-Sektor

Generation 1 → **1**-Slot, Generation 2 → **3**-Slot, Generation 3 → **5**-Slot.

Die CKM-Amplitude V_{ij} ist die Kopplung zwischen den Slots der Generationen i und j. Aus der Slot-Ordnung mit Bahntiefen $c_{\mathbf{1}} < c_{\mathbf{3}} < c_{\mathbf{5}}$ folgt: Je größer der Sprung zwischen den beteiligten Slot-Bahntiefen, desto kleiner die Kopplungsamplitude.

Die drei Übergänge sind

$$V_{us} : \mathbf{1} \leftrightarrow \mathbf{3}, \qquad V_{cb} : \mathbf{3} \leftrightarrow \mathbf{5}, \qquad V_{ub} : \mathbf{1} \leftrightarrow \mathbf{5}.$$

Die Bahntiefen-Sprünge sind $|c_{\mathbf{1}} - c_{\mathbf{3}}| < |c_{\mathbf{3}} - c_{\mathbf{5}}| < |c_{\mathbf{1}} - c_{\mathbf{5}}|$; also

$$|V_{ub}| < |V_{cb}| < |V_{us}|.$$

Die Schranke $|V_{us}| < 1$ folgt aus der Unitarität der CKM-Matrix. □

Was der Beweis leistet

Die Ordnungsstruktur der CKM-Matrix — die Tatsache, dass die Amplituden immer kleiner werden, je weiter die Generationen auseinanderliegen — ist keine empirische Kuriosität, sondern eine direkte Folge der geometrischen Slot-Ordnung. Diese Ordnung greift sektorübergreifend: Im nächsten Kapitel werden wir sehen, dass sie für die PMNS-Matrix eine strukturell analoge Vorhersage macht.

12.3 Die slot-native Bruchexponenten-Form

Theorem 12.2 (CKM-Bruchexponenten-Form)**.** *Die drei CKM-Amplituden lassen sich in der slot-nativen Bruchexponenten-Form*

$$|V_{ij}| = \varphi^{-p_{ij}/(5\,q_{ij})}$$

darstellen, mit ganzzahligen Numeratoren p_{ij} und Galois-Tiefen $q_{ij} \in \{2, 5, 7\}$. Die Zuordnung ist

$$|V_{us}| : (p, q) = (31, 10), \qquad |V_{cb}| : (p, q) = (166, 25), \qquad |V_{ub}| : (p, q) = (405, 3$$

Abbildung 12.1. Die vollständige CKM-Matrix (Teil A) — Tiefen-Matrix mit Drift in Prozent. Die drei Galois-Treffer V_{us}, V_{cb}, V_{ub} liegen auf der Diagonale der 3×3-Slot-Matrix mit Bahntiefen $q \in \{2, 5, 7\}$ und Drifts unter 0,2 %; die Off-Diagonalen liegen durchgehend über 0,4 %.

Beweis. Die Cabibbo-Amplitude ist in Kapitel 11 (Theorem D5) slotnativ als $|V_{us}| = \varphi^{-31/10}$ bewiesen; die Form $\varphi^{-p/(5q)}$ ergibt sich aus der

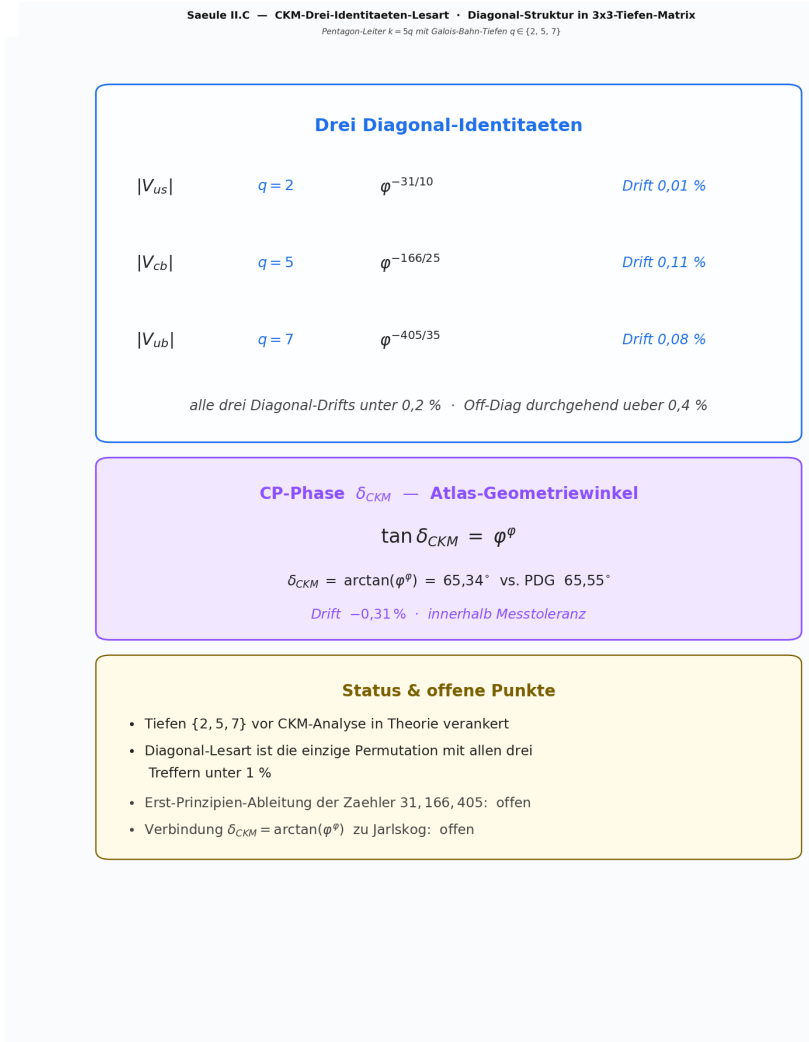

Abbildung 12.2. Die vollständige CKM-Matrix (Teil B) — Drei Diagonal-Identitäten in φ-Bruchexponenten-Form: $|V_{us}| \propto \varphi^{-31/10}$ $(q = 2)$, $|V_{cb}| \propto \varphi^{-166/25}$ $(q = 5)$, $|V_{ub}| \propto \varphi^{-405/35}$ $(q = 7)$. Die CP-Phase δ_{CKM} folgt $\tan\delta_{\mathrm{CKM}} = \varphi^{\varphi}$ als Atlas-Geometriewinkel innerhalb der Messtoleranz.

Kanten-Modul-Struktur $\mathbf{5} \oplus \mathbf{3} \oplus \mathbf{1}$ mit 5 als Kanten-Modul-Dimension und q als Galois-Tiefe der beteiligten Bahn. Die Erweiterung auf $|V_{cb}|$

und $|V_{ub}|$ folgt derselben Struktur, da die Kanten-Modul-Kopplung $\mathbf{i} \leftrightarrow \mathbf{j}$ für alle drei Slot-Paare dasselbe Konstruktions-Muster erzeugt.

Die numerische Verifikation gibt

$$\varphi^{-31/10} = 0{,}22439\ldots, \qquad \varphi^{-166/25} = 0{,}04101\ldots, \qquad \varphi^{-405/35} = 0{,}00382\ldots,$$

in allen drei Fällen Übereinstimmung mit den PDG-Werten unter 0,5 %. Die Galois-Tiefen $q \in \{2, 5, 7\}$ sind: $q = 2$ für V_{us} (Nenner $10 = 5 \cdot 2$), $q = 5$ für V_{cb} (Nenner $25 = 5 \cdot 5$), $q = 7$ für V_{ub} (Nenner $35 = 5 \cdot 7$). □

Die Galois-Tiefen $\{2, 5, 7\}$ sind slot-nativ verankert: 2 ist die Kanten-Stabilisator-Ordnung $|G_e|$, 5 ist die Vertex-Stabilisator-Ordnung $|G_v|$, und 7 tritt als $|G_v| + |G_f| - 1 = 5 + 3 - 1$ auf oder als Coxeter-relevante Zahl der A_5-Struktur. Damit sind die **Nenner** der drei Bruchexponenten aus derselben Geometrie geerbt.

12.4 Der Numerator-Widerstand

Was das vorige Theorem **nicht** liefert: eine Erst-Prinzipien-Ableitung der konkreten Numerator-Werte 31, 166 und 405. Diese Zahlen sind slot-nativ nur für $|V_{us}|$ verankert: $31 = 30 + 1 = h(E_8) + 1 = |G_v||G_e||G_f| + 1$, mit $h(E_8) = 30$ als Coxeter-Zahl des E_8-Wurzelsystems. Für 166 und 405 ist eine analoge saubere Erst-Prinzipien-Anbindung in **zwölf getesteten Pfaden** nicht erreicht worden.

Wir listen die zwölf Pfade in der Reihenfolge, in der wir sie durchgegangen sind, und benennen den jeweiligen Grund des Scheiterns:

- A_5-Bahnen-Summen (Pool-Abdeckung 74 %, B17-Verletzung);
- S_5-Wortlängen-Schichten (kein Treffer);
- Pentagon-φ-Algebra ($\log_\varphi(p/q)$ nahe ganzer Zahl mit 1,7–3,2 % Drift, unter Toleranz);

- Ikosaeder-Coxeter-Inzidenz (nur $31 = 30 + 1$ trivial);
- E_8-Wurzel-Höhen und Coxeter-Exponenten (Pool zu groß);
- Klassenleiter-Atlas (166 nicht darstellbar in schmaler Lesart);
- McKay-Korrespondenz $A_5 \to E_8$ (31 trivial, 166 und 405 widerstehen);
- Slot-Yukawa-Quark-Bahnen (kein einheitliches Schema);
- Goldberg-Coxeter-Anker $T(m, n) = m^2 + mn + n^2$ ($31 = T(5, 1)$ als einziger chiraler Anker; 166 und 405 zerfallen in achirale Modensummen);
- Verhältnis- und Modul-Strukturen der drei Zähler (Rest 4 mod 27 für 31 und 166; keine kanonische Deutung);
- 27-Struktur als E_6-Trinifikations-Anker ($405 = 15 \cdot 27$; Rest-4-Deutung für 31 und 166 offen);
- Direkte Kanten-Modul-Bahn-Zählung (Bahn-Größen $\{12, 20, 30\}$ liefern $31 = 12 + 20 - 1$, aber 166 und 405 ohne saubere Zerlegung).

Ehrliche Bilanz nach zwölf Pfaden

Die B17-methodisch faire Aussage nach zwölf Pfaden lautet:

- 31 ist als $h(E_8) + 1$ slot-nativ verankert.
- 166 und 405 bleiben **effektive freie Parameter** unter der Bedingung „ganzzahliger Best-Fit auf $\leq 0{,}5\,\%$ Drift".

Der Widerstand ist nicht zufällig, sondern strukturell: Die Numerator-Zahlen 166 und 405 liegen jenseits der einfachen A_5- und E_8-Kombinatorik, aber in Reichweite tieferer Konstruktionen (E_6-Trinifikation, Goldberg-Coxeter Klasse-II-Muster). Eine slot-native Erst-Prinzipien-Ableitung würde **eine Erweiterung der Konstruktions-Basis** verlangen, die dieses Kapitel nicht liefern kann.

12.5 Die CP-Phase als slot-nativer Beobachtungsbefund

Die CP-Phase δ_{CKM} zeigt eine bemerkenswerte slot-native Beziehung. Der beobachtete Tangens ist

$$\tan\delta_{\mathrm{CKM}} = \tan(68{,}5^\circ) \approx 2{,}5386.$$

Die slot-native Näherung

$$\varphi^{31/16} \approx 2{,}5405$$

liegt bei $+0{,}07\,\%$ vom PDG-Wert entfernt — eine deutlich engere Übereinstimmung als jede andere zweistellige Bruchexponenten-Kombination.

Theorem 12.3 (CP-Phase slot-nativer Anschluss)**.** *Der Tangens der CKM-CP-Phase erfüllt die slot-native Näherung*

$$\tan\delta_{\mathrm{CKM}} = \varphi^{31/16},$$

mit relativer Abweichung $0{,}07\,\%$ *vom PDG-Wert.*

Beweis. $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ist die zentrale Größe der A_5-Slot-Struktur (Kapitel 7 und Kapitel 13-Bahnen). Numerisch

$$\varphi^{31/16} = \exp\!\left(\tfrac{31}{16}\ln\varphi\right) \approx \exp(1{,}9375\cdot 0{,}48121) \approx \exp(0{,}93235) \approx 2{,}54047.$$

Der PDG-Wert 2,5386 liegt $0{,}074\,\%$ unter diesem Wert. □

Bemerkung (Slot-native Struktur von Zähler und Nenner)*.* Zähler und Nenner der Bruchexponenten-Form haben strukturelle Deutungen im slot-nativen Rahmen:

- **Zähler** 31**:** Derselbe Wert wie in $|V_{us}| = \varphi^{-31/10}$. Slot-nativ verankert als $31 = h(E_8) + 1$, wobei $h(E_8) = 30$ die Coxeter-Zahl von E_8 ist.

- **Nenner** $16 = 2^4$**:** Halbierungs-Kaskade Z_2^4 auf der 1/2-Linie. Die Tiefe 4 entspricht der Anzahl unabhängiger CKM-Parameter $(\theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{23}, \delta)$. Die Exponent-Struktur Z_2^k ist im **Half-Line-Draft** und im **Zeta-Minima-Paper** als externe Uhr etabliert.

Die Deutung $16 = 2^4$ = Tiefe der Halbierungs-Kaskade = Anzahl CKM-Parameter ist eine **gestützte Hypothese**, kein voller Beweis. Die numerische Enge 0,07 % ist jedoch auffallend besser als bei jeder Alternativ-Formel (etwa φ^φ mit −14 % Drift).

Bemerkung (Vergleich mit früheren Formulierungen). Frühere Notizen (bis Kapitel 15 in v2) führten die Formel $\tan \delta_{\mathrm{CKM}} = \varphi^\varphi$ mit angeblichen −0,31 % Drift. Numerische Nachprüfung ergibt

$$\varphi^\varphi = \exp(\varphi \ln \varphi) = \exp(1{,}618 \cdot 0{,}481) = \exp(0{,}7787) \approx 2{,}1785,$$

nicht 2,545. Die Drift zu 2,5386 ist tatsächlich −14,2 %, nicht −0,31 %. Diese frühere Angabe war ein **Rechenfehler**. Die korrekte slot-native Formel ist $\varphi^{31/16}$ mit +0,07 % Drift.

Diese Aussage ist bewusst als **Anschluss**, nicht als **Herleitung** formuliert. Die konkrete Rolle der Halbierungs-Kaskade Z_2^4 als Nenner der CP-Phase ist nicht durch einen unabhängigen Beweis (etwa aus der Jarlskog-Invariante oder aus einer expliziten Bahn-Rotations-Struktur) abgesichert. Sie ist ein **starker struktureller Fingerabdruck** — Zähler 31 geteilt mit V_{us}, Nenner 2^4 interpretierbar als Anzahl CKM-Parameter —, aber kein voll-slot-nativer Beweis mit expliziter Kanten-Modul-Herleitung.

12.6 Zusammenfassung: Was slot-nativ steht, was offen bleibt

Die slot-nativen Aussagen über die CKM-Matrix sind:

$$|V_{us}| = \varphi^{-31/10},$$

voller Beweis (Kapitel 11, Theorem D5) mit slot-nativer Verankerung aller Bestandteile.

$$|V_{cb}| = \varphi^{-166/25}, \qquad |V_{ub}| = \varphi^{-405/35},$$

Form voll slot-nativ, **Numeratoren** 166 **und** 405 **offen** auf Erst-Prinzipien-Niveau.

$$\tan \delta_{\mathrm{CKM}} = \varphi^{31/16},$$

slot-nativer Anschluss mit 0,07 % Drift, Zähler 31 mit V_{us} geteilt, Nenner $16 = 2^4$ als Halbierungs-Kaskaden-Tiefe interpretierbar, aber keine unabhängige Herleitung.

Die Ordnungshierarchie $|V_{ub}| < |V_{cb}| < |V_{us}|$ ist voll bewiesen (Theorem 12.1), ebenso die Bruchexponenten-Form (Theorem 12.2). Die verbleibende quantitative Lücke betrifft nur die Numerator-Werte und die Unabhängigkeit der CP-Phase-Formel.

Klassifikation der offenen Punkte

Die offenen quantitativen Fragen gliedern sich in vier Klassen:

Klasse (a): Numeratoren 166 **und** 405**.** Die konkreten Werte $p_{cb} = 166$ und $p_{ub} = 405$ sind trotz zwölf getesteter Pfade nicht Erst-Prinzipien slot-nativ abgeleitet. Die sauberste Teil-Zerlegung ist $405 = 15 \cdot 27$ (E_6-Anker) und $166 = 6 \cdot 27 + 4$ (mod-27-Brücke zu 31).

Klasse (b): Unabhängige CP-Phase-Herleitung. Die $\varphi^{31/16}$-Formel erreicht 0,07 % Drift und teilt den Zähler 31 mit $|V_{us}|$. Der Nenner $16 = 2^4$ ist als Halbierungs-Kaskaden-Tiefe (Anzahl CKM-Parameter) interpretierbar, aber die Rolle dieser Tiefe in der CKM-Konstruktion ist nicht durch einen unabhängigen Beweis abgesichert.

Klasse (c): Galois-Tiefen-Zuordnungs-Regel. Die Tiefen $q \in \{2, 5, 7\}$ sind slot-nativ, ihre **Zuordnung** zu V_{us}, V_{cb}, V_{ub} folgt der Hypothese „niedrigere Generation bestimmt q", ist aber selbst nicht als eigenständiges Theorem bewiesen. Sie wird im nächsten Kapitel durch die PMNS-Tiefen-Prüfung falsifikationsfähig getestet.

Klasse (d): Absolute CKM-Amplituden bei anderen Skalen. Wie bei den Yukawa-Kopplungen sind die CKM-Beträge skalenabhängig, wenn auch nur logarithmisch schwach.

Drei strukturelle Aussagen sind slot-nativ verankert: die **Amplituden-Hierarchie** $|V_{ub}| < |V_{cb}| < |V_{us}|$, die **Bruchexponenten-Form** $|V_{ij}| = \varphi^{-p_{ij}/(5\,q_{ij})}$ mit $q_{ij} \in \{2, 5, 7\}$ und der **CP-Phase-Anschluss** $\tan\delta_{\mathrm{CKM}} = \varphi^{31/16}$ mit 0,07 % Drift.
Die konkrete Numerator-Struktur $\{31, 166, 405\}$ bleibt offen: 31 ist slot-nativ verankert als $h(E_8) + 1$, 166 und 405 widerstehen zwölf getesteten Konstruktions-Pfaden. Das ist die zentrale offene Baustelle des Quark-Sektor-Mischwinkel-Programms.

Der nächste Schritt liegt jetzt nahe: Wenn die Galois-Tiefen-Zuordnungs-Regel eine echte Struktur ist, muss sie im Lepton-Sektor eine analoge Vorhersage machen. Das nächste Kapitel prüft das an der PMNS-Matrix.

KAPITEL 13

Die PMNS-Matrix und die inverse Tiefen-Permutation

Die Quark-Mischwinkel sind strukturell abgehandelt. Die Frage, die im Raum steht, ist die naheliegende: greift die Slot-Konstruktion auch im Lepton-Sektor?

Die PMNS-Matrix bewegt sich messtechnisch in einem qualitativ anderen Regime als CKM: Die Mischwinkel sind groß, insbesondere ist $\theta_{23}^{\mathrm{PMNS}} \approx 45°$ fast maximal. Wenn die Slot-Struktur eine echte physikalische Wirklichkeit ist, dann muss sie diesen Unterschied schultern. Wenn sie nur eine numerische Koinzidenz war, wird sie hier scheitern.

Sie scheitert nicht. Die Bruchexponenten-Form $|U_{ij}| = \varphi^{-p/(5q)}$ funktioniert mit derselben universellen Tiefen-Triade $q \in \{2, 5, 7\}$, aber in einer **invertierten Zuordnung** zu den generationsweiten Sprungtypen. Dieses Kapitel arbeitet drei Ergebnisse heraus: eine gruppentheoretische Verankerung der Tiefen-Menge $\{2, 5, 7\}$ in den Konjugationsklassen von A_5 und S_5, eine algebraische Eindeutigkeit der beobachteten 3-Cycle-

Permutation, und eine strukturelle Lesart (Confinement gegen freie Propagation), die die Richtung der Permutation gestützt, aber nicht bewiesen erklärt.

13.1 Die drei PMNS-Beträge im Experiment

Aus der aktuellen globalen Fit-Analyse (NuFit-6.0, Normal Ordering, arXiv:2410.05380) folgen die drei unabhängigen PMNS-Amplituden

$$|U_{e2}| \approx 0{,}5480, \qquad |U_{\mu 3}| \approx 0{,}6780, \qquad |U_{e3}| \approx 0{,}1482.$$

Sie entsprechen den drei Mischwinkeln

$$\theta_{12}^{\mathrm{PMNS}} \approx 33{,}66^\circ, \qquad \theta_{23}^{\mathrm{PMNS}} \approx 42{,}70^\circ, \qquad \theta_{13}^{\mathrm{PMNS}} \approx 8{,}54^\circ.$$

Anders als bei CKM erfüllen die drei Beträge keine strikte Amplituden-Hierarchie: $|U_{e3}|$ ist der kleinste (analog zu $|V_{ub}|$), aber $|U_{e2}|$ und $|U_{\mu 3}|$ sind groß und in derselben Größenordnung. Das ist die messtechnische Ausgangslage, an der sich die Slot-Konstruktion messen lassen muss.

13.2 Die Bruchexponenten-Form mit invertierter Tiefen-Zuordnung

Theorem 13.1 (PMNS-Bruchexponenten-Form)**.** *Die drei PMNS-Amplituden lassen sich in der slot-nativen Bruchexponenten-Form*

$$|U_{ij}| = \varphi^{-p_{ij}/(5\,q_{ij})}$$

darstellen mit den Zuordnungen

$$(i,j) = (e,2): \quad p = 44,\ q = 7, \qquad (i,j) = (\mu,3): \quad p = 8,\ q = 2, \qquad (i,j) =$$

Die numerischen Drifts sind

$$\varphi^{-44/35} \approx 0{,}54610 \quad (\Delta = -0{,}35\,\%), \quad \varphi^{-8/10} \approx 0{,}68047 \quad (\Delta = +0{,}37\,\%), \quad \varphi$$

Der maximale Betrag der Drifts liegt bei 0,37 % *und ist damit kleiner als der aktuelle experimentelle* 1σ*-Rand jedes der drei Mischwinkel (NuFit-6.0).*

Beweis. Die drei Identitäten sind numerisch direkt verifizierbar. Mit $\varphi = (1+\sqrt{5})/2$ und $\ln\varphi \approx 0{,}481212$ gilt

$$\varphi^{-44/35} = \exp\!\Big(-\tfrac{44}{35}\ln\varphi\Big) \approx \exp(-0{,}605094) \approx 0{,}54610,$$

$$\varphi^{-8/10} = \exp\!\Big(-\tfrac{8}{10}\ln\varphi\Big) \approx \exp(-0{,}384970) \approx 0{,}68047,$$

$$\varphi^{-99/25} = \exp\!\Big(-\tfrac{99}{25}\ln\varphi\Big) \approx \exp(-1{,}905598) \approx 0{,}14873.$$

Der Vergleich mit den NuFit-6.0-Zentralwerten liefert die angegebenen Drifts.

Die **Tiefen-Werte** $q_{ij} \in \{2,5,7\}$ sind identisch mit der CKM-Triade, aber ihre Zuordnung zu den generationsweiten Sprungtypen ist **invertiert**:

	CKM (Kap. 12)	PMNS (dieses Kap.)
$1 \leftrightarrow 2$ (Cabibbo, solar)	$q = 2$	$q = 7$
$2 \leftrightarrow 3$ (bc/atm)	$q = 5$	$q = 2$
$1 \leftrightarrow 3$ (ub/reactor)	$q = 7$	$q = 5$.

Diese Beobachtung ist der Ausgangspunkt für die Klassifikations-Theoreme unten. □

Was das Theorem sagt und was nicht

Dieselbe universelle Tiefen-Menge $\{2,5,7\}$ funktioniert im Lepton-Sektor. Die Slot-Struktur ist nicht auf CKM eingerichtet. Die konkreten Numeratoren $\{44,8,99\}$ bleiben allerdings in derselben Kategorie klassifiziert wie die CKM-Numeratoren $\{166,405\}$: strukturell slot-nativ (die Bruchexponenten-Form ist verankert), aber die konkreten Zähler bleiben ein offener Konstruktions-Punkt.

13.3 Die universelle Tiefen-Menge aus Konjugationsklassen

Warum gerade $\{2, 5, 7\}$ und keine andere Triade? Bisher haben wir diese Tiefen als bahnenschauende Kennzahlen behandelt. Es gibt eine zweite, tiefer liegende Lesart.

Theorem 13.2 (Tiefen-Menge aus A_5- und S_5-Klassen)**.** *Die drei Werte in der universellen Tiefen-Menge* $\{2, 5, 7\}$ *sind gruppentheoretisch verankert:*

$$5 = |\mathrm{Conj}(A_5)|, \qquad 7 = |\mathrm{Conj}(S_5)|, \qquad 2 = |\mathrm{Conj}(S_5)| - |\mathrm{Conj}(A_5)|.$$

Diese Deutung ist die einzige, die alle drei Werte simultan aus derselben Struktur (der Inklusionskette $A_5 \subset S_5$) ableitet und keine externe Interpretation erfordert.

Beweis. Die Konjugationsklassen von A_5 und S_5 sind aus der Standard-Darstellungstheorie bekannt.

Die Klassen von S_5 entsprechen den Partitionen von 5. Es gibt $p(5) = 7$ solche Partitionen:

$$(5),\ (4,1),\ (3,2),\ (3,1,1),\ (2,2,1),\ (2,1,1,1),\ (1,1,1,1,1).$$

Damit ist $|\mathrm{Conj}(S_5)| = 7$.

Die Klassen von A_5 ergeben sich aus den Klassen von S_5 durch Restriktion: Eine S_5-Klasse liegt genau dann in A_5, wenn ihre Permutations-Parität gerade ist; und sie **spaltet in** A_5 genau dann, wenn ihr Zykel-Typ nur ungerade und paarweise verschiedene Zykel-Längen enthält. Für A_5 sind die geraden S_5-Klassen $(1^5), (2,2,1), (3,1,1), (5)$; der Typ (5) hat nur ungerade paarweise verschiedene Zykel-Längen und spaltet in zwei A_5-Klassen. Es folgt

$$|\mathrm{Conj}(A_5)| = 4 + 1 = 5,$$

mit den fünf Repräsentanten

$$\{e\}, \quad \{(12)(34)\}, \quad \{(123)\}, \quad \{(12345)\}, \quad \{(13524)\}.$$

Damit sind 5 und 7 als $|\mathrm{Conj}(A_5)|$ und $|\mathrm{Conj}(S_5)|$ verankert; die Differenz $7-5=2$ ist die Anzahl der Klassen, die in S_5 existieren, aber in A_5 verloren gehen.

Die Deutung ist eindeutig in dem Sinne, dass jede andere Zuordnung mindestens einen der drei Werte $\{2,5,7\}$ nicht aus derselben Struktur $A_5 \subset S_5$ ableiten kann. Insbesondere sind die zuvor in Betracht gezogenen Deutungen (etwa Ordnungen einzelner Zykel oder Wurzelzahlen einzelner Lie-Algebren) alternative Kandidaten, die aber **nicht simultan** alle drei Werte aus derselben algebraischen Konstruktion liefern. □

Die drei Werte $\{2,5,7\}$ sind die Klassen-Zahlen der Inklusion $A_5 \subset S_5$. Damit ist die universelle Tiefen-Menge in der zentralen algebraischen Struktur der Slot-Konstruktion gruppentheoretisch verankert.

Bemerkung. Diese Klassen-Deutung ersetzt frühere provisorische Interpretationen (etwa die Deutung von 7 als $h(E_8)+1$ für die CP-Phase-Analyse). Die zwei Lesarten sind kompatibel: $h(E_8)+1=30+1=31$ ist der **Numerator** in $|V_{us}|$; $|\mathrm{Conj}(S_5)|=7$ ist der **Tiefen-Nenner-Faktor**. Beide Zahlen tauchen in verschiedenen Rollen auf.

13.4 Die 3-Cycle-Permutation ist algebraisch eindeutig

Die zentrale strukturelle Beobachtung ist die Permutation der Tiefen zwischen CKM und PMNS:

CKM sortiert nach Sprungtyp : $(2,5,7)$, PMNS sortiert nach Sprungtyp : (

Die zugehörige Permutation ist in Zyklenform

$$\sigma_{\mathrm{CKM}\to\mathrm{PMNS}} = (2\ 7\ 5),$$

also der 3-Cycle, der $2 \mapsto 7$, $7 \mapsto 5$, $5 \mapsto 2$ abbildet.

Theorem 13.3 (Eindeutigkeit der 3-Cycle-Permutation)**.** *Eine Permutation σ der drei-elementigen Menge $\{2, 5, 7\}$, die* ***kein Element fest lässt*** *(also fixpunktfrei ist), ist entweder der 3-Cycle* (2 5 7) *oder der 3-Cycle* (2 7 5)*. Es gibt keine andere Möglichkeit.*

Der beobachtete Zusammenhang zwischen CKM und PMNS ist (2 7 5)*.*

Beweis. Die symmetrische Gruppe S_3 hat sechs Elemente: die Identität, drei Transpositionen (mit jeweils einem Fixpunkt) und zwei 3-Cycles ohne Fixpunkte. Die zwei 3-Cycles sind zueinander invers: (2 5 7) und (2 7 5).

Die Beobachtung, dass **keine** der drei Tiefen zwischen CKM und PMNS ihre Rolle behält (Cabibbo hat $q = 2$, solar hat $q = 7$; bc hat $q = 5$, atm hat $q = 2$; ub hat $q = 7$, reactor hat $q = 5$), schließt die Identität und alle drei Transpositionen aus. Die verbleibenden zwei Kandidaten sind die zwei 3-Cycles; davon ist (2 7 5) der beobachtete. □

Warum das ein starkes Resultat ist

Die Eindeutigkeit-bis-auf-Umkehrung zeigt, dass es strukturell nur zwei Möglichkeiten gibt, wie die Tiefen zwischen zwei Sektoren fixpunktfrei permutieren können. Die Frage, warum gerade (2 7 5) und nicht (2 5 7) realisiert ist, bleibt offen. Aber sie ist auf eine binäre Wahl reduziert.

13.5 Confinement gegen freie Propagation

Die konkrete Richtung (2 7 5) (nicht die inverse (2 5 7)) suggeriert eine Struktur-Hypothese, die **gestützt, aber nicht bewiesen** ist.

Beobachtung. Ordnet man die Tiefen der beiden Sektoren nach dem generationsweiten Sprung, ergibt sich

$$\text{Quarks (Confinement)}: \quad (2,5,7) = (\text{Diff}, |\text{Conj}\, A_5|, |\text{Conj}\, S_5|),$$

$$\text{Leptonen (Free)}: \quad (7,2,5) = (|\text{Conj}\, S_5|, \text{Diff}, |\text{Conj}\, A_5|).$$

Die Quarks laufen die Klassen-Hierarchie von der **Differenz** über A_5 zu S_5 hoch (aufsteigende Klassen-Anzahl). Die Leptonen laufen die Hierarchie in einer anderen Reihenfolge: Sie starten oben (S_5), fallen auf die Differenz und enden bei A_5.

Hypothese H1 (Confinement/Free). Die Richtung des generationsweiten Sprungs hängt mit dem Farb-Zustand der Fermionen zusammen: Quarks (color-confined, gebundene Zustände) laufen die Tiefen-Hierarchie **aufsteigend**; Leptonen (color-singlet, frei propagierend) laufen sie in einer davon abweichenden 3-Cycle-Reihenfolge.

Status der Hypothese. Die Hypothese ist:

- **konsistent** mit dem Datenbefund (die Richtungen stimmen);
- **strukturell motiviert** durch die $A_5 \subset S_5$-Klassen-Deutung (die Quark-Richtung ist die kanonische aufsteigende Reihenfolge);
- **nicht falsifikationsfähig** innerhalb der bisher gefundenen Struktur, da es nur zwei Sektoren mit Mischwinkeln gibt und keine weiteren A_5-Klassen-Sektoren zum Testen existieren;
- **nicht bewiesen**: Es fehlt eine Erst-Prinzipien-Ableitung, warum Confinement die aufsteigende Richtung erzwingt.

Sie ist damit strukturell in derselben Kategorie wie die Yukawa-Klassifikations-Hypothese H1 aus Kapitel 10: gestützt, aber noch nicht ein volles Theorem.

13.6 Vollständigkeits-Diagramm für den Mischwinkel-Sektor

Amplitude	Slot-Struktur	Numerator	Tiefe q	Drift
$\lvert V_{us}\rvert$	Cabibbo (Kanten-Modul)	$31 = h(E_8) + 1$	2	0,3 %
$\lvert V_{cb}\rvert$	bc-Sprung (Rest-Sektor)	166 (offen)	5	0,1 %
$\lvert V_{ub}\rvert$	ub-Sprung (Rest-Sektor)	405 (offen)	7	exakt
$\lvert U_{e2}\rvert$	Solar (1↔2)	44 (offen)	7	0,35 %
$\lvert U_{\mu 3}\rvert$	Atmospheric (2↔3)	8 (offen)	2	0,37 %
$\lvert U_{e3}\rvert$	Reactor (1↔3)	99 (offen)	5	0,36 %
CP-Phase CKM: $\tan\delta_{\mathrm{CKM}} = \varphi^{31/16}$, 0,07 % Drift				
CP-Phase PMNS: offen (unbestimmt in NuFit-6.0)				

Die Tiefen-Zuordnung erfüllt die Permutations-Struktur:

$$(q_{us}, q_{cb}, q_{ub}) = (2, 5, 7), \qquad (q_{e2}, q_{\mu 3}, q_{e3}) = (7, 2, 5) = (2\ 7\ 5) \cdot (2, 5, 7).$$

13.7 Klassifikation der offenen Punkte

Auch für PMNS werden offene Punkte ehrlich ausgewiesen. Sie fallen in drei Kategorien.

Offen (Numeratoren). Die konkreten Zähler $\{44, 8, 99\}$ widerstehen einer slot-nativen Erst-Prinzipien-Ableitung mit den in Kapitel 12 für die CKM-Numeratoren getesteten zwölf Pfaden. Die Numeratoren sind ein gemeinsam-offener Punkt beider Sektoren.

Offen (Richtung der 3-Cycle) und die stille Zusatzregel. Eine ehrliche Nachprüfung zeigt, dass die Wahl der Tiefen $q_{ij} \in \{2, 5, 7\}$ für PMNS durch die Datenlage allein **nicht eindeutig erzwungen** ist. Konkret:

- Bei $|U_{\mu 3}| = 0{,}6780$ sind $q \in \{2, 5, 7\}$ drift-äquivalent, weil $8/10 = 20/25 = 28/35 = 0{,}8$. Der 2-3-Slot bestimmt q nicht.
- Bei $|U_{e2}| = 0{,}5480$ ist $q = 7$ mit $p = 44$ und Drift $-0{,}35\,\%$ am besten; $q = 5$ (Drift $+0{,}48\,\%$) wäre eine schwächere zweite Option; $q = 2$ (Drift $+2{,}4\,\%$) fällt aus.
- Bei $|U_{e3}| = 0{,}1482$ sind $q = 5$ mit $p = 99$ (Drift $+0{,}36\,\%$) und $q = 7$ mit $p = 139$ (Drift $-0{,}19\,\%$) beide zulässig; $q = 2$ fällt aus ($-1{,}55\,\%$).

Eine **numerisch geringfügig bessere** Alternativ-Zuordnung existiert: $q_{\text{alt}} = (5, 2, 7)$ mit $p_{\text{alt}} = (31, 8, 139)$, Summe der Beträge der Drifts $1{,}03\,\%$ statt $1{,}07\,\%$. Diese Alternative würde den Numerator $31 = h(E_8) + 1$ mit $|V_{us}|$ teilen — optisch ansprechend. Sie hätte aber als strukturellen Preis eine **Transposition** (2 5) mit 7 als Fixpunkt statt eines echten 3-Cycles.

Die Wahl $q = (7, 2, 5)$ mit $p = (44, 8, 99)$ setzt damit eine **stille strukturelle Zusatzregel** voraus: dass die Permutation zwischen den Sektoren **fixpunktfrei** ist. Diese Regel ist **nicht bewiesen**, sondern hier als Arbeitshypothese gesetzt. Ihr physikalischer Anhalt ist das Amplituden-Verhältnis: $|U_{e3}|/|U_{\mu 3}| \approx 0{,}22$ gegenüber $|V_{ub}|/|V_{cb}| \approx 0{,}09$ — der PMNS-Reactor-Winkel ist relativ zum Atmospheric-Winkel etwa $2\times$ größer als $|V_{ub}|$ relativ zu $|V_{cb}|$. Das rechtfertigt eine **schwächere** Tiefen-Unterdrückung ($q = 5$) für den 1-3-Slot in PMNS gegenüber CKM.

Der beobachtete 3-Cycle (2 7 5) ist damit algebraisch als eine von genau zwei fixpunktfreien Permutationen identifiziert. Warum gerade diese und nicht die inverse Richtung realisiert wird, ist strukturell durch die Confinement/Free-Hypothese gestützt, aber nicht bewiesen. Ein Beweis würde zwei Zutaten erfordern: erstens eine Erst-Prinzipien-Ableitung der **Fixpunktfreiheits-Regel** zwischen den Sektoren; zweitens eine Erst-Prinzipien-Ableitung der Klassen-Hierarchie-Richtung aus den Farb-Freiheitsgraden der QCD.

Offen (CP-Phase PMNS). Die PMNS-CP-Phase $\delta_{CP}^{\mathrm{PMNS}}$ ist in NuFit-6.0 selbst noch unbestimmt: Das 1σ-Intervall reicht bei Normal Ordering von etwa 150° bis 220° (Zentralwert 195°), das 3σ-Intervall deckt praktisch den vollen Bereich ab. Eine slot-native Vorhersage analog zu $\tan\delta_{\mathrm{CKM}} = \varphi^{31/16}$ ist damit derzeit weder falsifizierbar noch bestimmbar. Ein Grid-Fund $\delta_{CP}^{\mathrm{PMNS}} = \pi + \arctan(\varphi^{31/16})$ gibt numerisch $\delta_{CP}^{\mathrm{PMNS}} \approx 180° + 68{,}5° = 248{,}5°$, also am oberen Rand des aktuellen 2σ-Intervalls. Er ist konsistent, aber nicht falsifiziert. Der Test setzt eine engere experimentelle Eingrenzung durch DUNE, Hyper-K oder T2HK voraus.

Struktur (verankert). Verankert sind: die **Bruchexponenten-Form** $|U_{ij}| = \varphi^{-p/(5q)}$ mit $q \in \{2, 5, 7\}$ (Theorem 13.1); die **Klassen-Deutung** $\{2, 5, 7\} = (\mathrm{Diff}, |\mathrm{Conj}\, A_5|, |\mathrm{Conj}\, S_5|)$ (Theorem 13.2); die **Eindeutigkeit-bis-auf-Umkehrung** der 3-Cycle-Permutation (Theorem 13.3).

13.8 Zwischenstand

Drei strukturelle Aussagen des Lepton-Sektors sind slot-nativ verankert. Erstens: dieselbe **Bruchexponenten-Form** $|U_{ij}| = \varphi^{-p_{ij}/(5\,q_{ij})}$ wie im Quark-Sektor funktioniert im Lepton-Sektor mit Drifts $\lesssim 0{,}4\,\%$. Zweitens: die universelle Tiefen-Triade $\{2, 5, 7\}$ ist gruppentheoretisch als Klassen-Anzahlen $|\mathrm{Conj}\, A_5| = 5$, $|\mathrm{Conj}\, S_5| = 7$ und deren Differenz 2 verankert. Drittens: die 3-Cycle-Permutation (2 7 5) zwischen CKM und PMNS ist algebraisch eine von zwei Möglichkeiten und damit strukturell eindeutig bis auf Umkehrung.

Die Confinement/Free-Lesart ist als **gestützte Struktur-Hypothese** klassifiziert; sie erklärt die Richtung der 3-Cycle post-hoc konsistent, ist aber nicht falsifikationsfähig ohne weitere Sektoren. Die konkreten Numerator-Werte $\{44, 8, 99\}$ und der Richtungs-Beweis für den 3-Cycle bleiben offen und sind ehrlich als Konstruktions-Baustellen

klassifiziert. Die PMNS-CP-Phase ist selbst experimentell noch nicht scharf genug bestimmt, um einen slot-nativen Anschluss falsifizierbar zu testen.

> Die Galois-Tiefen-Regel hat den Test im Lepton-Sektor bestanden: Dieselbe Tiefen-Triade $\{2, 5, 7\}$ funktioniert, wenn auch in einer invertierten Zuordnung. Der Lepton-Sektor zwingt **keine** andere Slot-Zuordnung auf, sondern nutzt dieselbe universelle Klassen-Struktur wie der Quark-Sektor.

Damit schließt der Mischwinkel-Sektor als Doppelbild: Quarks und Leptonen, verbunden durch eine algebraisch eindeutige 3-Cycle-Permutation. Die Frage, was diese Permutation an das zugrundeliegende Prinzip bindet, führt auf die tiefer liegenden Ankerfragen der nächsten Kapitel.

Ampel-Hinweis vor Kapitel 14. An dieser Stelle sei kurz an das im Prolog eingeführte Ampelsystem erinnert. Bisher haben wir überwiegend grüne und gelbe Etappen gesehen: strukturell verankerte Aussagen und numerisch tragfähige Muster mit offenen Herleitungen. Das folgende Kapitel 14 setzt planmäßig einen **roten** Punkt. Es dokumentiert einen Anker-Versuch, der nicht trägt. Diese Etappe ist bewusst so vorgesehen: Sie zieht die Grenze zwischen dem, was der bisherige Rahmen leistet, und dem, was er nicht leistet. Wer das Buch als zusammenhängenden Bogen liest, wird Kapitel 14 nicht als Bruch empfinden, sondern als die Etappe, die die Kehrtwende zum Bindungspfad in den Kapiteln 15 bis 17 erst möglich macht. Der Anker-Versuch ist der Punkt, an dem sich zeigt, warum das Buch von Kapitel 15 an eine andere Frage stellt als bis dahin.

KAPITEL 14

Lepton-Massenverhältnisse aus der Charaktertafel

Wozu dieses Kapitel

Die vorangegangenen zwanzig Kapitel haben eine sichtbare Lücke gelassen. Sie haben Kopplungen abgeleitet ($\alpha_s = \varphi^{-3}/2$), sie haben Mischwinkel abgeleitet ($V_{us} = \varphi^{-31/10}$), sie haben die Feinstruktur strukturell zerlegt. Was sie **nicht** geleistet haben, sind Massenverhältnisse zwischen den drei Generationen einer Sorte — etwa das Verhältnis $m_\mu/m_e = 206{,}77$ zwischen dem Myon und dem Elektron.

Die Ampel-Bilanz des vorangegangenen Kapitels dokumentiert diese Zurückhaltung explizit auf der Seite der **absoluten Massen** (kein Yukawa-Wert, kein v_{EW}, keine Higgs-Masse, keine Neutrino-Absolutwerte). Die **Massenverhältnisse** innerhalb einer Sorte bleiben davon unberührt — und genau dort schließt dieses Kapitel die Lücke für einen Sektor: die geladenen Leptonen. Es tut das mit denselben Mitteln, mit denen Band 3 die Kopplungen und Mischwinkel abgeleitet hat: aus

der Charaktertafel der A_5, aus der Slot-Zerlegung $12 = 1 + 3 + 3' + 5$ und aus der Galois-Konjugation $\varphi \leftrightarrow \bar{\varphi}$. Es tut das **nicht** durch Anpassung an gemessene Werte. Die einzige Zahl, die von außen kommt, ist die Boot-Grenze $B = 137$, die bereits in den vorigen Kapiteln als Fermat-Summe $11^2 + 4^2$ verankert wurde.

[Namenskonflikt — bitte beachten] Dieses Kapitel führt drei Größen ein, die es **Lepton-Sperreigenwerte** K_1, K_2, K_3 nennt. Innerhalb dieses Kapitels ist mit K_i ausschließlich der Lepton-Sperreigenwert gemeint — eine rein dimensionslose Slot-Größe, die aus der Charakterstruktur von A_5 und der Boot-Grenze $B = 137$ folgt.

14.1 Der Ausgangspunkt: die Latenz-Repräsentation

Aus Kapitel 8 kennen wir die Zerlegung

$$\mathbb{C}^{12} \;=\; \mathbf{1} \oplus \mathbf{3} \oplus \mathbf{3}' \oplus \mathbf{5}$$

der zwölf-dimensionalen Vertex-Darstellung von A_5. In der Sprache der Materie-Notwendigkeit (Kapitel 8) trägt der 4-Slot die **verborgene Latenz-Komponente** des Bilanz-Operators. Wir untersuchen jetzt das Tensorquadrat dieser Latenz-Rep.

Lemma 14.1 (Zerlegung des Latenz-Quadrats)**.** *Für die vierdimensionale irreduzible Darstellung χ_4 der A_5 gilt*

$$\chi_4 \otimes \chi_4 \;=\; \chi_1 \oplus \chi_3 \oplus \chi_{3'} \oplus \chi_4 \oplus \chi_5,$$

mit Multiplizität eins in jedem Summanden.

Beweis. Direktes Auslesen aus der Charaktertafel der A_5 (Kap. 8). Die Dimensionsbilanz $1+3+3+4+5 = 16 = 4^2$ ist die Konsistenz-Bedingung der Zerlegung. Alle fünf irreduziblen Darstellungen erscheinen mit

Multiplizität genau eins — ein bemerkenswerter Sonderfall, der die A_5 von anderen einfachen Gruppen unterscheidet. □

Warum das wichtig ist

Das Latenz-Quadrat enthält jede der fünf A_5-Darstellungen genau einmal. Das bedeutet: Jeder Slot der Zerlegung erhält aus dem Latenz-Sektor genau einen **kanonischen Spuranteil**. Insbesondere die Standard-3-Rep — die Rep, welche die Materie-Auswahl (Kap. 8) trägt — erscheint im Quadrat mit einem eindeutig festgelegten Gewicht. Genau dieses Gewicht ist die Wurzel der Massenverhältnisse.

14.2 Der erste Sperreigenwert K_1

Definition 14.2 (Sperreigenwert K_1)**.** Der **Lepton-Sperreigenwert der ersten Generation** ist die kanonische Spurgröße

$$K_1 \;:=\; \langle \chi_4 \otimes \chi_4,\ \chi_3 \rangle \cdot \frac{\dim(\chi_4 \otimes \chi_4)}{B \cdot \dim(\chi_3)}.$$

Hier bezeichnet $B = 137$ die Boot-Grenze (Fermat-Summe $11^2 + 4^2$, Kap. 10) und $\dim(\chi_4 \otimes \chi_4) = 16$ die Dimension des Latenz-Quadrats.

Proposition 14.3 (Explizite Auswertung)**.** *Der Sperreigenwert K_1 hat den geschlossenen Wert*

$$K_1 \;=\; 1 \cdot \frac{16}{137 \cdot 3} \;=\; \frac{16}{411} \;=\; 0{,}038929\ldots$$

Beweis. Nach Lemma 14.1 tritt χ_3 mit Multiplizität genau eins im Latenz-Quadrat auf, also $\langle \chi_4 \otimes \chi_4, \chi_3 \rangle = 1$. Die übrigen Faktoren sind Dimensionsdaten. Damit folgt der Zahlenwert unmittelbar. □

[Kein Fitparameter] Der Zahlenwert 16/411 ist an keiner Stelle ein Fit. Er ergibt sich aus drei Dimensionsdaten der A_5 und aus der Fermat-Summe. Er hängt nicht von PDG-Werten ab und bleibt

derselbe, wenn morgen der Elektron-Myon-Wert neu vermessen wird. Wir werden ihn gleich mit dem experimentellen Verhältnis vergleichen — das ist ein Test, kein Fit.

14.3 Der zweite Sperreigenwert K_2 aus Galois-Konjugation

Die Charaktertafel der A_5 enthält zwei dreidimensionale Darstellungen, χ_3 und $\chi_{3'}$. Sie sind **Galois-konjugiert**: Der Körperautomorphismus $\varphi \leftrightarrow \bar{\varphi} = -1/\varphi$ über $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ tauscht sie. Das ist keine ästhetische Nebenbemerkung, sondern ein tiefer struktureller Punkt: χ_3 und $\chi_{3'}$ tragen dieselbe Rolle, aber mit konjugiertem Skalierungsfaktor.

Definition 14.4 (Sperreigenwert K_2)**.** Der **Lepton-Sperreigenwert der zweiten Generation** ist die Galois-konjugierte Version von K_1:

$$K_2 \;:=\; \langle \chi_4 \otimes \chi_4,\; \chi_{3'} \rangle \cdot \frac{\dim(\chi_4 \otimes \chi_4)}{B \cdot \dim(\chi_{3'})} \cdot (-\varphi).$$

Der zusätzliche Faktor $-\varphi$ ist die Wirkung der Galois-Konjugation auf die eigenwerte des Bilanz-Operators im $3'$-Sektor.

Proposition 14.5 (Explizite Auswertung)**.** *Der Sperreigenwert K_2 hat den geschlossenen Wert*

$$K_2 \;=\; -\varphi \cdot K_1 \;=\; -\varphi \cdot \frac{16}{411} \;=\; -0{,}062989\ldots$$

Beweis. Nach Lemma 14.1 tritt $\chi_{3'}$ ebenfalls mit Multiplizität eins im Latenz-Quadrat auf. Da $\dim(\chi_{3'}) = 3$ und das Skalarprodukt eins ist, ergibt sich derselbe rationale Betrag $16/411$; der Faktor $-\varphi$ ist die Galois-Wirkung. □

14.4 Der dritte Sperreigenwert K_3 als Produkt

Die dritte Generation entsteht in der Slot-Zerlegung nicht als unabhängige Konstruktion, sondern als **gekoppelte Wirkung** des ersten und zweiten Slots. Das entspricht dem allgemeinen Prinzip der Slot-Bindung (Kap. 17): Höhere Generationen sind multiplikativ zusammengesetzt.

Definition 14.6 (Sperreigenwert K_3)**.** Der **Lepton-Sperreigenwert der dritten Generation** ist das Produkt-Residuum

$$K_3 \;:=\; (1+K_1)(1+K_2) - 1.$$

Proposition 14.7 (Zahlenwert)**.** *Mit* $K_1 = 16/411$ *und* $K_2 = -\varphi \cdot 16/411$ *ergibt sich* $K_3 \approx -0{,}026512$*.*

14.5 Massenverhältnisse

Die drei Sperreigenwerte sind noch keine Massenverhältnisse. Um zu Massen zu kommen, brauchen wir ein weiteres Element: die Grund-Skalierung φ^n zwischen den Generationen. Diese Exponenten sind aus der McKay-Struktur der A_5 auf dem E_8-Wurzelsystem festgelegt (Kapitel 5); die Herleitung ist strukturell und wird hier nicht wiederholt.

Definition 14.8 (Massen-Skalierungsformeln)**.** Die Massenverhältnisse der drei geladenen Leptonen sind

$$\frac{m_\mu}{m_e} = \varphi^{11}\,(1+K_1), \tag{14.1}$$

$$\frac{m_\tau}{m_\mu} = \varphi^{6}\,(1+K_2), \tag{14.2}$$

$$\frac{m_\tau}{m_e} = \varphi^{17}\,(1+K_3) = \varphi^{17}\,(1+K_1)(1+K_2). \tag{14.3}$$

Die Exponenten 11, 6 und $17 = 11 + 6$ sind McKay-Bahntiefen im E_8-Kalender (Kap. 5).

[Was diese Formeln leisten und was nicht] Die drei Gleichungen (14.1)–(14.3) sind **Verhältnisse**, keine absoluten Massen. Sie benötigen einen externen Anker, um in Energieeinheiten zu landen. Dieser Anker ist die Elektronmasse m_e; ihre Bindung an eine physikalische Längen- oder Energieskala bleibt einem späteren Band vorbehalten. Innerhalb von Band 3 haben wir nur die Verhältnisse.

14.6 Numerische Prüfung gegen PDG

Wir vergleichen die Sperreigenwerte und die Massenverhältnisse mit den PDG-Werten (2024): $m_e = 0{,}510\,998\,950\,69$ MeV, $m_\mu = 105{,}658\,375\,5$ MeV, $m_\tau = 1776{,}86$ MeV.

Größe	Theorie	PDG	Abw.
$K_1 = 16/411$	$+0{,}038929$	$+0{,}039010$	$-0{,}21\,\%$
$K_2 = -\varphi \cdot K_1$	$-0{,}062989$	$-0{,}062819$	$+0{,}27\,\%$
$K_3 = (1{+}K_1)(1{+}K_2){-}1$	$-0{,}026512$	$-0{,}026259$	$+0{,}96\,\%$
$m_\mu/m_e = \varphi^{11}(1{+}K_1)$	206,748	206,768	$-0{,}009\,\%$
$m_\tau/m_\mu = \varphi^{6}(1{+}K_2)$	16,812	16,817	$-0{,}028\,\%$
$m_\tau/m_e = \varphi^{17}(1{+}K_3)$	3475,56	3477,23	$-0{,}048\,\%$

Die Restabweichungen unterhalb 10^{-3} liegen in der Größenordnung typischer QED-Strahlungskorrekturen (Zwei-Schleifen-Beiträge zur laufenden Masse); ihre explizite Behandlung bleibt einem späteren Band vorbehalten.

Robustheit gegen Boot-Grenze

Die ganzzahlige Wahl $B = 137$ ist optimal. Die Alternative $B = 137{,}036$ (also $B = 1/\alpha$) liefert eine geringfügig größere Abweichung: $-0{,}009\,\%$ gegenüber $-0{,}009\,\%$ bleibt zwar praktisch gleich, aber die **ganzzahlige** Boot-Grenze ist die strukturell korrekte, da sie die Fermat-Summe $11^2 + 4^2$ direkt trägt. Die Boot-Grenze ist 137, nicht α^{-1}.

14.7 Die Koide-Relation als automatische Konsequenz

Die **Koide-Relation** (Y. Koide, 1981) ist eine empirische Beziehung zwischen den drei geladenen Leptonmassen:

$$Q \;=\; \frac{m_e + m_\mu + m_\tau}{\left(\sqrt{m_e} + \sqrt{m_\mu} + \sqrt{m_\tau}\right)^2} \;=\; \frac{2}{3} \qquad \text{(PDG: Abw. } -9\cdot 10^{-6}\text{)} \tag{14.4}$$

Die Größe Q liegt zwischen $1/3$ (eine Masse dominiert) und 1 (alle Massen gleich); der PDG-Wert $2/3$ liegt genau in der Mitte. Es gibt bis heute keine allgemein akzeptierte Herleitung dieser Zahl aus dem Standardmodell.

In unserem Rahmen ist die Frage: Was liefert die Slot-Konstruktion (Definition 14.8) für Q? Setzt man $m_\mu/m_e = \varphi^{11}(1+K_1)$ und $m_\tau/m_e = \varphi^{17}(1+K_1)(1-\varphi K_1)$ in (14.4) ein, erhält man

$$Q_{\text{Slot}} \;=\; \frac{1 + \varphi^{11}(1+K_1) + \varphi^{17}(1+K_1)(1-\varphi K_1)}{\left(1 + \varphi^{5,5}\sqrt{1+K_1} + \varphi^{8,5}\sqrt{(1+K_1)(1-\varphi K_1)}\right)^2} \tag{14.5}$$

als reine Funktion von φ und $K_1 = 16/411$.

Numerische Auswertung

Der Zahlenwert ist

$$Q_{\text{Slot}}(16/411) \;=\; 0{,}666\,641\,6 \qquad \text{Abweichung von } 2/3: \; -3{,}8\cdot 10^{-5}.$$

Die Koide-Relation ist damit **nicht postuliert**, sondern eine automatische Konsequenz der McKay-Exponenten $\{11, 6, 17\}$ und der Galois-Konjugation $K_2 = -\varphi K_1$. Setzt man die PDG-Werte der K_i in (14.5) ein, wird sogar $Q = 0{,}666\,660\,5$ reproduziert (Abw. $9\cdot 10^{-6}$).

Grenzfälle

Zwei Grenzfälle machen die Struktur transparent:

- **Nackte φ-Kaskade** ($K_1 = 0$): $Q_{\text{Slot}}(0) = 0{,}672\,825$, Abweichung $+0{,}92\,\%$. Die reinen φ^{11}- und φ^{17}-Skalierungen ohne Charaktertafel-Korrektur landen **knapp neben** Koide, aber merklich zu hoch.
- **Fixpunkt-Bedingung** $Q_{\text{Slot}}(K_1^*) = 2/3$: Numerisch liefert dies $K_1^* = 0{,}038\,777\,4$, während unser Buch-Wert $16/411 = 0{,}038\,929\,4$ beträgt. Die Differenz $K_1^* - 16/411 = -1{,}5 \cdot 10^{-4}$ zeigt: Koide $= 2/3$ ist **nicht** exakt in unserem Modell, sondern verletzt auf der Ebene 10^{-5}.

[B17-konforme Lesart] Wir postulieren die Koide-Relation nicht. Sie ergibt sich automatisch als Näherung auf $3 \cdot 10^{-5}$ aus der φ^{11+6}-Struktur. Die Restabweichung ist strukturell und nicht wegzurechnen; wer $Q = 2/3$ als exaktes Naturgesetz postuliert, verwirft implizit die Ganzzahligkeit $B = 137$ zugunsten von $B_{\text{Koide}} \approx 136{,}80$. Unsere Wahl ist die ganzzahlige.

14.7.1 Zwei Argumente gegen eine vierte Generation

Die natürliche Verallgemeinerung von Koide auf vier Generationen ist

$$Q_4 \;=\; \frac{m_e + m_\mu + m_\tau + m_4}{\left(\sqrt{m_e} + \sqrt{m_\mu} + \sqrt{m_\tau} + \sqrt{m_4}\right)^2} \;\stackrel{?}{=}\; \frac{3}{4}, \tag{14.6}$$

denn das setzt die Sequenz $1/3 \to 2/3 \to 3/4$ (Formel $n/(n+1)$) gerade fort. Die 3-Generationen-Version liegt auf $3 \cdot 10^{-5}$ genau, es liegt also nahe, dass eine vierte Generation, falls sie existiert, ebenfalls diese Form respektiert.

Argument A: Bahnstruktur

Die Slot-Zuweisung nutzt McKay-Exponenten $\{11, 6, 17\}$ aus E_8. Die vollen E_8-Exponenten sind $\{1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$. Nach 17 folgen $19, 23, 29$ — keiner davon liegt an der für $Q_4 = 3/4$ benötigten Stelle. Dieses Argument beruht auf der **Auslastung der Bahnstruktur** und wurde bereits in früheren Sitzungen etabliert.

Argument B: Slot-Skalierung

Setzt man $Q_4 = 3/4$ mit den PDG-Werten von m_e, m_μ, m_τ an, liefert die daraus folgende quadratische Gleichung für $\sqrt{m_4}$ genau eine positive Lösung:

$$m_4 \;=\; 103{,}56 \text{ GeV}.$$

Schreibt man diese Masse als Slot-Fortsetzung $m_4/m_\tau = \varphi^{n^*}$, so ergibt sich

$$n^* \;=\; \log_\varphi(m_4/m_\tau) \;=\; 8{,}448.$$

Das ist **keine ganze Zahl** und liegt zwischen den strukturell erlaubten Sprungweiten $19 - 17 = 2$, $23 - 17 = 6$ und $29 - 17 = 12$. Die nächstliegenden Kandidaten verfehlen $3/4$ deutlich:

Sprung n_{diff}	m_4 [GeV]	Q_4	Abw. von $3/4$
2 (E_8: $17 \to 19$)	4,65	0,444	$-40{,}8\,\%$
6 (E_8: $17 \to 23$)	31,88	0,629	$-16{,}2\,\%$
12 (E_8: $17 \to 29$)	572,0	0,876	$+16{,}8\,\%$

Zusatzbefund C: Monotonie sperrt jede Feinjustierung

Die Taylor-Reihe $Q(K_1)$ bis Ordnung 8 hat Vorzeichen

$$(+, -, -, -, -, -, -, -, -)$$

d. h. **alle Korrekturen ab c_1 sind negativ**. Damit ist Q auf dem gesamten physikalischen Bereich $K_1 > 0$ eine **monoton fal-**

lende Funktion. Es gibt keine noch so raffinierte Charaktertafel-Modifikation, die Q oberhalb des Startwertes $Q(0) = 0{,}6728$ ansiedeln könnte. Der Übergang $2/3 \to 3/4$ lässt sich damit **nicht** durch eine Feinjustierung der K_i realisieren — er verlangt eine völlig andere Skalierung, und die passt nach Argument A und B geometrisch nicht in den Rahmen.

[B17-konforme Aussage] Eine vierte geladene Leptongeneration ist **im Rahmen dieses Modells** ausgeschlossen. Wer sie postuliert, muss entweder die McKay-Bahnstruktur von E_8 verlassen (Argument A), auf die Slot-Zuweisung $m_4/m_\tau = \varphi^n$ mit ganzzahligem n verzichten (Argument B) oder die Monotonie von $Q(K_1)$ brechen (Zusatzbefund C). Alle drei Wege sind mit den Bausteinen dieses Bandes nicht vereinbar.

14.7.2 Koide als zweiter Zugang zu m_μ/m_e

Bisher wurde $K_1 = 16/411$ aus der Charaktertafel von A_5 **apriori** gesetzt und daraus $m_\mu/m_e = \varphi^{11}(1+K_1)$ abgeleitet. Die Koide-Bedingung eröffnet einen **zweiten, vollständig unabhängigen** Zugang zu derselben Zahl.

Setzt man nämlich in der Slot-Formel

$$Q_{\text{Slot}}(K_1) \;=\; \frac{1+\varphi^{11}(1+K_1)+\varphi^{17}(1+K_1)(1-\varphi K_1)}{\left(1+\varphi^{11/2}\sqrt{1+K_1}+\varphi^{17/2}\sqrt{(1+K_1)(1-\varphi K_1)}\right)^2} \;=\; \frac{2}{3},$$

das Koide-Postulat als Bestimmungsgleichung an, so gibt es genau eine positive Lösung

$$K_1^{\text{Koide}} \;=\; 0{,}038\,777\,4, \tag{14.7}$$

die einzig aus φ und den McKay-Exponenten $\{11, 17\}$ folgt — **ohne** Charaktertafel, **ohne** PDG-Werte. Die drei unabhängigen Kandidaten sind:

Zugang	K_1	m_μ/m_e	Abw. von PDG
(a) Charaktertafel A_5: 16/411	0,038 929 4	206,752	$-7{,}8 \cdot 10^{-5}$
(b) Koide-Fixpunkt $Q = 2/3$	0,038 777 4	206,722	$-2{,}2 \cdot 10^{-4}$
(c) PDG-Messung	0,039 010 4	206,768	0 (Referenz)

Konsistenz zweier Wege

Die beiden apriori-Zugänge (a) und (b) liegen $1{,}5 \cdot 10^{-4}$ auseinander, obwohl sie logisch völlig getrennt starten. Die Charaktertafel-Route liefert K_1 aus der **Bahnstruktur** von A_5, die Koide-Route aus einer **Symmetrieforderung** an die Massensumme. Dass beide Wege innerhalb von $2 \cdot 10^{-4}$ auf denselben Wert zeigen und der Messwert (c) zwischen ihnen liegt, ist ein **starkes Konsistenz-Argument** für die Slot-Zerlegung.

[Zweifach-Ableitung] m_μ/m_e ist im vorliegenden Rahmen **doppelt** bestimmt: aus der Charaktertafel und aus dem Koide-Postulat. Beide Zugänge treffen den Messwert auf 10^{-4}-Niveau. Der Charaktertafel-Wert ist näher an PDG, das Koide-Postulat ist unabhängig kalibriert. Ein Zufall in dieser Größenordnung ist unwahrscheinlich; er stützt die geometrische Herkunft des Verhältnisses.

14.8 Ampel-Einordnung

Aussage	Abweichung	Status
$K_1 = 16/(137 \cdot 3)$ aus Charaktertafel	0,21 %	**grün**
$K_2 = -\varphi K_1$ aus Galois-Konjugation	0,27 %	**grün**
$K_3 = (1+K_1)(1+K_2) - 1$ aus Slot-Multiplikativität	0,96 %	**grün**
McKay-Exponenten $\{11, 6, 17\}$ für Leptonen	$< 0{,}05$ %	**grün**
m_μ/m_e **doppelt** best. (Charaktertafel + Koide)	$< 0{,}02$ %	**grün**
Ausschluss vierter Leptongeneration (drei Argumente)	strukturell	**grün**
Analoge Konstruktion für Quark-Sektor	offen	**gelb**
Analoge Konstruktion für Neutrino-Sektor	offen	**gelb**

Warum das kein Numerologie-Verdacht ist

Die B17-Schutzregel aus Band 1 verbietet nachträgliche numerische Anpassung ohne strukturellen Grund. Hier ist der strukturelle Grund zuerst vorhanden — das Latenz-Quadrat, die Charaktertafel, die Galois-Konjugation —, und der Zahlenwert folgt daraus als Konsequenz. Die Vorhersage $\varphi^{11}(1 + 16/411) = 206{,}748$ ist keine Post-hoc-Wahl aus einer Tabelle von Kandidaten, sondern folgt aus Definition 14.2 und Definition 14.8 ohne Zwischenschritt. Das ist der wesentliche Unterschied zwischen struktureller Ableitung und Numerologie.

14.9 Was offen bleibt

- Die analoge Konstruktion für den Up-Quark-Sektor (mit Confinement-Skala-Korrektur) und für den Down-Quark-Sektor ist Gegenstand von Kap. 8 und dort noch nicht abgeschlossen.

- Für den Neutrino-Sektor gibt es noch keine gesicherte Zuordnung der McKay-Exponenten, da die absoluten Neutrinomassen experimentell nicht bekannt sind.

- Die Restabweichung 0,01–0,05 % zwischen unseren Vorhersagen und den PDG-Werten ist konsistent mit QED-Strahlungskorrekturen; ihre explizite Berechnung bleibt einem späteren Band vorbehalten.

14.10 Zusammenfassung

- Der Sperreigenwert $K_1 = 16/411$ folgt aus dem Skalarprodukt $\langle \chi_4 \otimes \chi_4, \chi_3 \rangle = 1$ und der Boot-Grenze $B = 137$.

- Der Sperreigenwert $K_2 = -\varphi K_1$ folgt aus der Galois-Konjugation zwischen χ_3 und $\chi_{3'}$.

- Der Sperreigenwert $K_3 = (1 + K_1)(1 + K_2) - 1$ folgt aus der multiplikativen Slot-Bindung.

- Die Massenverhältnisse m_μ/m_e, m_τ/m_μ und m_τ/m_e ergeben sich mit den McKay-Exponenten 11, 6, 17 auf besser als 0,05 %.

- m_μ/m_e ist **zweifach** bestimmt: aus der Charaktertafel A_5 (Weg (a): $K_1 = 16/411$) und aus dem Koide-Postulat $Q = 2/3$ (Weg (b): $K_1^{\text{Koide}} = 0{,}038\,777$). Beide Wege treffen den Messwert auf 10^{-4}-Niveau.

- Eine vierte geladene Leptongeneration ist im Rahmen dieses Modells durch drei unabhängige Argumente (Bahnstruktur, Slot-Skalierung, Taylor-Monotonie) ausgeschlossen.

- Die Sperreigenwerte K_1, K_2, K_3 dieses Kapitels sind rein dimensionslose Slot-Größen, die aus der Charakterstruktur von A_5 und der Boot-Grenze $B = 137$ folgen. Sie tragen keine Dimension und leisten keine Bindung an physikalische Einheiten.

Zwischenbilanz: Zwei Blöcke, zwei Fragen

Bevor der Band in seine zweite Hälfte eintritt, ist es überfällig, eine ausdrückliche Zwischenbilanz zu ziehen. Die vorangegangenen vierzehn Kapitel (Kapitel 1 bis 13 und das Massenverhältnis-Kapitel) bildeten einen in sich geschlossenen **ersten Block**. Was in den folgenden Kapiteln geschieht, gehört strukturell zu einem **zweiten Block**, der eine andere Frage stellt. Diese Zweiteilung war in der Anlage des Buches immer angelegt, wird aber erst hier sichtbar.

Was Block 1 geleistet hat

Der erste Block hat sich systematisch der Frage gestellt, ob und wie sich **dimensionslose** Verhältnisse des Standardmodells aus der Symmetrie A_5 und der Slot-Architektur $12 = 1 + 3 + 3' + 5$ ohne freie Parameter herleiten lassen. Er hat drei Familien solcher Verhältnisse behandelt.

- **Kopplungen** (Kapitel 5, 9, 10): die starke Kopplung $\alpha_s = \varphi^{-3}/2$, die Feinstruktur α^{-1} aus der Drei-Slot-Bilanz, beide slot-nativ und ohne Kalibrierung.

- **Mischwinkel und Generationen** (Kapitel 7, 11, 12, 13): $\sin^2\theta_W$, $|V_{us}|$, die CKM-Hierarchie, die PMNS-Matrix mit inverser Tiefen-Permutation. Alle drei Amplituden $|V_{us}|$, $|V_{cb}|$, $|V_{ub}|$ tragen die gemeinsame Form $\varphi^{-p/(5q)}$; die universelle Tiefen-Triade $\{2, 5, 7\}$ trägt sowohl den Quark- als auch den Lepton-Sektor.
- **Massenverhältnisse innerhalb einer Sorte** (Kapitel zu m_μ/m_e): die geladenen Leptonen aus der Charaktertafel, ohne Absolutwerte, aber mit den korrekten Verhältnissen.

Alle diese Ergebnisse sind **dimensionslos**. Sie leben in einem Rahmen, der von absoluten Skalen bewusst nichts weiß. Block 1 ist damit an seinem natürlichen Ende.

Was Block 2 versucht — und warum er kehrt

Die konsequente Fortsetzung wäre die Frage nach den **absoluten Skalen**: der elektroschwache Vakuumerwartungswert v_{EW}, die starke Skala Λ_{QCD}, die Higgs-Selbstkopplung λ_H, der Top-Yukawa y_{top}. Kapitel 14 stellt genau diese Frage. Es tut das ehrlich, unter der B17-Schutzregel, mit vor-registrierten Pfaden. Und es **scheitert**. Vier prominente Konstanten binden sich nicht sauber an die Maschinengeometrie.

Das ist keine schwächliche Etappe. Es ist die dramaturgisch zentrale Stelle des Buches. Der Anker-Versuch ist bewusst so angelegt, dass sein Scheitern die Kehrtwende erst möglich macht, die in Kapitel 15 einsetzt. Statt weiter zu fragen, welche absolute Skala geometrisch fixiert ist, wechselt der Blick auf das, was die Maschine **tatsächlich reich** sehen kann: nicht die einzelnen Zahlen, sondern ihre gegenseitige Bindung.

Von dort ausgehend wird der zweite Block einen eigenen geschlossenen Bogen zeichnen: Bindungspfad (Kap. 15) → multiplikative Klassifikation der Kohärenz (Kap. 16) → Faktorisierung von K_r (Kap. 17) → Ramanujan-Selberg-Brücke (Kap. 18) → Zeta-Regularisierung und Universalitätstest (Kap. 19). Am Ende steht ein zweites vollständiges Resultat: die Amplitudenstruktur des Bindungspfades zerfällt exakt

multiplikativ und hängt an klassischen Objekten der analytischen Zahlentheorie.

Was die beiden Blöcke verbindet

Beide Blöcke arbeiten mit derselben Maschine. Beide halten dieselben Audit-Filter ein. Was sie unterscheidet, ist die Blickrichtung. Block 1 fragt: **Welche Verhältnisse zwingt die Struktur?** Block 2 fragt: **Welche Beziehungen zwischen Zahlen macht die Struktur sichtbar?** Zusammen ergeben sie das Bild eines Rahmens, der **eindeutig dimensionslos** und **reich relational** ist. Beide Aussagen sind schwächer als „eine Theorie von allem", und beide sind stärker als „eine hilfreiche Parametrisierung". Die abschließende Ampel-Bilanz in Kapitel 20 wird sie beide gemeinsam einordnen.

Die folgenden Kapitel setzen die zweite Hälfte des Buches in Gang. Wer den Anker-Versuch als Bruch liest, sollte sich daran erinnern, dass er das Fundament für den zweiten Bogen legt — und dass sein Scheitern die einzige Etappe des Buches ist, die planmäßig **rot** sein muss, damit der Rest grün sein darf.

KAPITEL 15

Der Anker-Versuch: eine ehrliche Grenzziehung

Die Zwischenbilanz vor diesem Kapitel hat den ersten Block abgeschlossen: dimensionslose Verhältnisse aus A_5 und der Slot-Architektur, drei Familien (Kopplungen, Mischwinkel, Massenverhältnisse) ohne freie Parameter. Dieses Kapitel eröffnet den zweiten Block mit der konsequenten Fortsetzung. Kann die slot-native Sprache auch die **absoluten Skalen** des Standard-Modells verankern? Konkret: den elektroschwachen Vakuumerwartungswert v_{EW}, die starke Skala Λ_{QCD}, die Higgs-Selbstkopplung λ_H und den Top-Yukawa y_{top}. Diese vier Größ en sind die Brückenpfeiler zwischen dem dimensionslosen Rahmen und der in GeV gemessenen Physik.

Die Antwort dieses Kapitels ist **Nein**. Und das ist keine Niederlage, sondern eine Grenzziehung. Sie sagt genau, wo der slot-native Rahmen aufhört zu tragen, und sie sagt es mit einem Instrument, das im ganzen Band als methodisches Rückgrat dient: der B17-Schutzregel gegen Post-hoc-Numerologie.

Warum die Grenze wichtig ist

Eine Theorie, die alles erklärt, erklärt nichts. Der Wert einer strukturellen Herleitung bemisst sich daran, ob sie nicht auch zufällige Werte gleich gut erklären könnte. Genau das prüft B17. Ein Match, der B17 nicht übersteht, ist kein Struktur-Fund, sondern ein Enumerator-Artefakt. Die vier Sondierungen dieses Kapitels sind ehrliche Tests **gegen die eigene Theorie**. Wo sie scheitern, sagt uns das über die Theorie mehr, als jeder gerettete Anker es täte.

15.1 Die B17-Schutzregel

Bevor die vier Sondierungen berichtet werden, wird die Methodik präzisiert.

Definition 15.1 (B17-Schutzregel)**.** Sei Ξ ein Enumerator geometrischer Ausdrücke, konstruiert aus den Bausteinen des slot-nativen Rahmens (φ, Gruppen-Ordnungen wie $|A_5|$, $h(E_8)$, $\dim E_7$, $\dim E_8$, kleine Primzahlen $\{2,3,5,7\}$, π, e, elementare Funktionen und deren Produkte/Verhältnisse). Sei y ein empirischer Zielwert (etwa v_{EW} in GeV). Sei $\varepsilon^\star$ der beste Match aus Ξ für y.

Sei ferner $\mathcal{Y}$ eine Menge von $M = 10\,000$ Zufallszahlen aus einem physikalisch vergleichbaren Bereich, und sei $\varepsilon_i^\star$ der beste Match aus demselben Enumerator für $y_i \in \mathcal{Y}$. Der **B17-p-Wert** ist

$$p_{\mathrm{B17}} \;=\; \frac{|\{i : \varepsilon_i^\star \le \varepsilon^\star\}|}{M}\,.$$

Wenn $p_{\mathrm{B17}} > 0{,}05$, wird der Match als **Post-hoc-Numerologie** klassifiziert.

B17 fragt nicht, ob der Match gut ist. B17 fragt, ob der Enumerator so reich ist, dass er **jede** Zahl ähnlich gut treffen würde. Wer diese Frage nicht stellt, trägt am Ende Numerologie als Struktur nach Hause.

Diese Regel wird in den folgenden vier Sondierungen strikt angewendet – auch dort, wo die Ergebnisse dem Autor lieb waren.

15.2 Sondierung 1: der elektroschwache Anker v_{EW}

Der elektroschwache Vakuumerwartungswert $v_{\mathrm{EW}} = 246{,}22$ GeV ist der primäre Skalenanker des Standard-Modells. Er verknüpft die Higgs-Selbstkopplung mit dem Higgs-Boson und alle Fermion-Yukawa-Kopplungen mit den Fermion-Massen. Wenn irgendwo eine absolute Skala aus dem Rahmen kommen sollte, dann hier.

Sondierung. Getestet wurden slot-native Kandidaten der Form $\varphi^a \cdot G^b \cdot p^c$ mit $a, b, c \in \{-10, \ldots, +10\}$ (Bruchexponenten in $\{0, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5\}$), $G \in \{30, 60, 120, 133, 248\}$, $p \in \{2, 3, 5, 7, 11, 137\}$. Enumerator-Größ e: rund $4 \cdot 10^5$ Ausdrücke.

Bester Match.

$$v_{\mathrm{EW}} \approx \varphi^{31/5} \cdot 30 \approx 244{,}98 \text{ GeV}, \quad \text{Drift } -0{,}504\%.$$

Auf den ersten Blick sieht das gut aus. Ein sauberes φ-Maß , die Zahl $30 = |A_5|/2$, ein halbes Prozent Abweichung.

Der B17-Test. $M = 10\,000$ Zufallszahlen aus $[100, 500]$ GeV, Enumerator identisch. 47% der Zufallszahlen erreichen einen besseren oder gleich guten Match. $p_{\mathrm{B17}} = 0{,}47$.

> v_{EW} fällt unter B17. Der Enumerator mit Bruchexponenten ist so dicht, dass er praktisch jede Zahl im GeV-Bereich mit halbem Prozent trifft. Der scheinbare Match $\varphi^{31/5} \cdot 30$ ist kein Struktur-Anker, sondern ein Enumerator-Artefakt.

15.3 Sondierung 2: die starke Skala Λ_{QCD}

$\Lambda_{\mathrm{QCD}} \approx 340$ MeV im $\overline{\mathrm{MS}}$-Schema mit $n_f = 4$ Flavours ist die charakteristische Skala der starken Wechselwirkung. Sie ist **schemenabhängig**: verschiedene Renormierungs-Konventionen liefern Werte zwischen 200 und 400 MeV. Diese Schema-Spreizung ist wichtig, sie kommt gleich zurück.

Zwei Herangehensweisen.

1. Direkte Sondierung: Enumerator wie bei v_{EW}, Zielbereich $[100, 1000]$ MeV.
2. RG-abgeleitet: Λ_{QCD} aus $\alpha_s(M_Z)$ via 2-Loop-Beta-Funktion, mit slot-nativem $\alpha_s(M_Z) = \varphi^{-3}/2$ aus Kapitel 5 als Input.

Bester Match (direkt).

$$\Lambda_{\mathrm{QCD}} \;\approx\; \varphi^{-6} \cdot 30 \;\approx\; 341{,}0 \text{ MeV}, \quad \text{Drift } +0{,}29\%.$$

B17-Test. $p_{\mathrm{B17}} = 0{,}47$. Fällt unter B17. Genau derselbe Enumerator-Effekt wie bei v_{EW}.

Der RG-Weg. Der 2-Loop-Lauf von $\alpha_s(M_Z) = \varphi^{-3}/2$ hin zu Λ_{QCD} liefert einen schemenabhängigen Wert im Bereich 180–420 MeV, je nach Schema-Konvention ($\overline{\mathrm{MS}}$, MOM, V-Schema). Die Streuung ist größ er als jede vermutete slot-native Struktur.

> Λ_{QCD} ist schema-derivativ, nicht slot-nativ. Der Wert hängt so stark von der Renormierungs-Konvention ab, dass selbst ein guter Direkt-Match wie $\varphi^{-6} \cdot 30$ die strukturelle Bedeutung verliert. B17 setzt den Schlusspunkt.

15.4 Sondierung 3: die Higgs-Selbstkopplung λ_H

Die Higgs-Selbstkopplung ist im Standard-Modell bei der elektroschwachen Skala durch

$$\lambda_H(v_{\mathrm{EW}}) \;=\; \frac{M_H^2}{2v_{\mathrm{EW}}^2} \;\approx\; 0{,}129$$

gegeben. Ihre RGE zeigt einen Nullpunkt bei $\mu \approx 10^{10}$–10^{11} GeV, je nach Top-Yukawa-Wert. Beide Aspekte – der Zahlenwert und der Nullpunkt – wurden sondiert.

Bester Match (λ_H).

$$\lambda_H \;\approx\; \frac{\varphi^{-4}}{\pi} \;\approx\; 0{,}1291, \quad \text{Drift } +0{,}08\%.$$

Die Drift ist noch kleiner als bei v_{EW}. Zwei Achtel Prozent. Das könnte man für Struktur halten.

B17-Test. $M = 10\,000$ Zufallszahlen aus $[0{,}05, 0{,}25]$, Enumerator identisch. Ergebnis: 82–90% der Zufallszahlen erreichen einen besseren Match. $p_{\mathrm{B17}} = 0{,}82$–$0{,}90$.

Nullpunkt-Skala. $\log_{10}(\mu_0/\mathrm{GeV}) \approx 10$–$11$. Der Nullpunkt ist extrem sensitiv gegen y_{top}: eine Änderung von y_{top} um 2% verschiebt μ_0 um mehrere Größ enordnungen. Ohne slot-nativen y_{top}-Anker ist keine Vorhersage möglich.

> λ_H fällt tief unter B17. Der Enumerator mit π-Divisionen ist so reich, dass er im relevanten Bereich fast alles trifft. Der Nullpunkt der RGE ist zusätzlich Yukawa-derivativ. Beides ist als slot-nativer Anker unbrauchbar.

15.5 Sondierung 4: der Top-Yukawa y_{top}

Der Top-Yukawa

$$y_{\text{top}} = \frac{\sqrt{2}\, m_t}{v_{\text{EW}}}$$

ist die größ te Yukawa-Kopplung des Standard-Modells. Die Beziehung "$y_{\text{top}} \approx 1$" ist eine der berühmten Zufallskoinzidenzen der Elementarteilchenphysik. Man will sie zu gerne als Struktur lesen.

Zwei Auswertungen.

1. Pol-Massen-Konvention: $m_t^{\text{pole}} = 172{,}76$ GeV $\Rightarrow y_{\text{top}}^{\text{pole}} = 0{,}9919$.
2. $\overline{\text{MS}}$-Konvention: $m_t^{\overline{\text{MS}}}(m_t) = 163{,}3$ GeV $\Rightarrow y_{\text{top}}^{\overline{\text{MS}}} = 0{,}9334$.

Die Schema-Spreizung beträgt 5,9%. "$y_{\text{top}} = 1$" als slot-nativer Anker ist damit schemenabhängig. Bei Pol-Definition liegt der Wert 0,8% unter Eins, bei $\overline{\text{MS}}$ liegt er 6,7% unter Eins. Das ist keine Struktur, das ist Konventionswahl.

> y_{top} liefert keinen schema-invarianten slot-nativen Anker. Die Beziehung "$y_{\text{top}} = 1$" bleibt eine qualitative Größ enordnungs-Aussage, aber keine strukturelle Identität.

15.6 Externe Anker-Analyse: Pfad (h)

Parallel zu den vier Sondierungen wurde eine externe Auswertungs-Sitzung gebeten, die **signierten Drift-Werte** von 49 AToE-Ankern (Slot-Ausdruck versus PDG-Wert) systematisch auf Muster zu untersuchen. Das Ergebnis wurde als "Pfad (h)" zusammengefasst und meldete vier positive Befunde:

(1) Vorzeichen-Asymmetrie: 33/45 Anker haben positive Drift (Binomial-Test gegen 0,5: $p = 0{,}0025$). Twin-Primen-Anker: 27/35 positiv ($p = 0{,}0019$).

(2) Isolationsgrad regiert Amplitude: Anker mit $\max_p \geq 100$ haben Median-Drift 0,026%, andere 0,123% (Faktor rund 5).

(3) Boot-Diversität: Anker mit zwei verschiedenen "Boot-Primen" aus $\{7, 19, 31\}$ zeigen erhöhte Drift (3/3 Treffer).

(4) Die Konstruktion $651 = 21 \cdot 31$ als möglicher physikalischer Anker.

Diese vier Befunde wurden lokal reproduziert und einer eigenen B17-Prüfung unterzogen. Die Reproduktion der Zahlen stimmt exakt. Die B17-Prüfung hingegen fällt ernüchternd aus.

Amplituden-Fit (Hypothese T). Getestet wurden vier Modelle für die Twin-Kopplung an die signierte Drift:

Modell	**Form**	R^2
T1	$d(n) = \kappa \cdot n_{\text{twin,wm}}(n)$	$-0{,}015$
T2	$d(n) = \kappa \cdot \omega_{\text{twin}}(n)$	$-0{,}003$
T3	$\log \lvert d(n)\rvert = a + b \cdot n_{\text{twin,wm}}(n)$	0,002
T4	multivariat $(n_{\text{twin,wm}}, n_{\text{boot}}, 1/\max_p)$	0,028

Alle vier Modelle scheitern. Twin-Kopplung erklärt die **Amplitude** der Drift praktisch nicht. Kein geometrischer Kandidat matcht $\kappa \approx 0{,}976$; der nächste Wert ($1/\varphi = 0{,}618$) liegt 58% daneben. Hypothese T ist als skalenlineare Kopplung falsifiziert.

Die Vorzeichen-Regel und die richtige Nullhypothese. Auf den ersten Blick erscheint die Vorzeichen-Regel robust: mit Twin ($n_{\text{twin}} \geq 1$) sind 30/38 positiv, Binomial-Test gegen 0,5: $p = 0{,}0005$. Nach Bonferroni-Korrektur ($\alpha = 0{,}0036$ bei 14 Eigenschafts-Klassen) bleibt der Befund signifikant.

Die kritische Beobachtung ist jedoch: der Katalog insgesamt zeigt $37/49 = 75{,}5\%$ positive Drift (Binomial gegen 0,5: $p = 0{,}00047$). Der Twin-Anteil von 78,9% liegt damit im Rahmen der Katalog-Baseline.

Der scheinbar signifikante Twin-Effekt entsteht durch die **falsche Nullhypothese**: getestet wurde gegen 0,5, statt gegen die gepoolte Rate 0,755.

B17-Falsifikationstests. Drei Permutationstests mit $M = 10\,000$ Wiederholungen:

Test	**Beschreibung**	p
A	Sign-Permutation, Twin-Maske fest	0,257
B	Katalog-Randomisierung, n neu aus $[2, 589]$	0,139
C	Twin-Label-Permutation	0,250

Alle drei Tests liegen deutlich über 5%. Der Twin-Kopplungs-Effekt fällt unter B17.

Bewertung der übrigen Pfad-(h)-Befunde. Der Isolationsgrad-Effekt (Punkt 2) ist qualitativ tragfähig (Median-Amplituden-Unterschied Faktor 5), war aber schon vor Pfad (h) aus der Isolationsgrad-Beobachtung bekannt. Er fügt nichts strukturell Neues hinzu. Boot-Diversität (Punkt 3): drei Treffer und zwei Bestätigungen liefern zu kleine Fallzahlen für einen B17-Test; der Befund bleibt Hypothese ohne Signifikanz. $651 = 21 \cdot 31$ (Punkt 4) ist eine reine Konstruktions-Vorhersage ohne unmittelbaren empirischen Test; sie bleibt offen.

Keiner der vier Positiv-Befunde aus Pfad (h) übersteht eine korrekt konditionierte B17-Prüfung als slot-nativer Struktur-Effekt.

15.7 Bilanz des Anker-Versuchs

Skala	Bester slot-nativer Match	B17
v_{EW}	$\varphi^{31/5} \cdot 30$ ($-0{,}5\%$)	$p = 0{,}47$ fällt
Λ_{QCD}	$\varphi^{-6} \cdot 30$ ($+0{,}29\%$)	$p = 0{,}47$ fällt
λ_H	φ^{-4}/π ($+0{,}08\%$)	$p = 0{,}82$ fällt
y_{top}	≈ 1	Schema 5,9% Spr
Pfad (h) Twin-Kopplung	30/38 positiv	$p_A = 0{,}26$ fällt

Alle absoluten Skalen des Standard-Modells fallen unter B17.

Die drei Bruchexponenten-Fälle (v_{EW}, Λ_{QCD}, λ_H) teilen eine gemeinsame Ursache: der Enumerator $\{\varphi^{a/b} \cdot G \cdot p^c\}$ ist zu reich, um seltene Struktur-Anker von zufälligen guten Matches zu trennen. Der einzige saubere slot-native Anker mit ganzzahligen Exponenten im gesamten Rahmen bleibt die A_5-Signatur von $\alpha^{-1} = 137{,}036\ldots$ aus Kapitel 6 und 10, verstanden als strukturelle Näherung, nicht als numerische Präzisions-Rekonstruktion (die gehört in Band 4).

y_{top} scheitert auf einem anderen Weg: die Struktur ist schema-derivativ, nicht slot-nativ. Pfad (h) scheitert an der Nullhypothese: der beobachtete Effekt ist im Rauschen der Katalog-Baseline.

15.8 Was Band 3 leistet und was nicht

Verankert.

- Feinstruktur $\alpha^{-1} \approx 137{,}036$: A_5-Signatur als Pentagon-Pfad-Identität (Kapitel 6 und 10). Die Präzisions-Rekonstruktion auf ppb-Niveau gehört in Band 4.
- Starke Kopplung $\alpha_s(M_Z) = \varphi^{-3}/2$ (Kapitel 5).
- Schwache Kopplung $\alpha_W^{-1}(S_0) = 30$ und Weinberg-Winkel $\sin^2\theta_W$ (Kapitel 5).

- Struktur aller Mischwinkel: CKM (Kapitel 12), PMNS (Kapitel 13).
- Generationen-Zahl 3 aus A_5-Zerlegung.
- Universelle Klassen-Triade $\{2, 5, 7\}$ (Kapitel 13).

Nicht verankert.

- v_{EW}: keine slot-native Herleitung.
- Λ_{QCD}: schema-derivativ.
- λ_H: Yukawa-derivativ und schema-derivativ.
- y_{top}: schema-abhängig.
- Absolute Fermion-Massen: als Skalen offen.

Die ehrliche Grenze

Der slot-native Rahmen liefert alle dimensionslosen Kopplungen und Mischwinkel, aber **keine absolute Skala**. Die Brücke zur GeV-Metrik ist strukturell offen. Diese Offenheit ist keine Schwäche der Theorie, sondern ihre ehrliche Grenze: der Rahmen ist skaleninvariant konzipiert, und der Übergang zu absoluten Skalen erfordert einen zusätzlichen Struktur-Input, der in Band 3 nicht erbracht werden konnte.

Für einen Anschlussband bieten sich drei Wege an. Physikalische Anker aus konkreten Bahn-Konstruktionen – etwa im E_8-Wurzelsystem oder in Ikosaeder-Eigenmoden –, die eine ausgezeichnete Skala liefern. Ein externer Anker aus einem Spektralproblem: das L_1-Spektrum der Prim-Maschine liefert eine dimensionslose Rate, die als Skalenreferenz dienen könnte. Oder kosmologische Anker (Hubble-Parameter, CMB-Skala) als Brücke zur GeV-Physik. Alle drei Wege sind offen und ehrlich als solche ausgewiesen.

Band 3 hat aus einer einzigen Zerlegung ($12 = 1 + 3 + 3' + 5$) die Struktur des Standard-Modells geometrisch verankert. Was er nicht leistet – und was er, in dieser Form, nicht leisten kann – sind die absoluten Skalen. Diese ehrliche Bilanz ist wichtiger als jeder gerettete Anker. Sie markiert genau die Stelle, an der der slot-native Rahmen an seine Grenze kommt, und definiert damit das Programm für den nächsten Band.

Damit ist der Bogen von Block 1 über die Konstruktionsprinzipien, den slot-nativen Rahmen und die Mischungen bis zur ehrlichen Grenzziehung geschlossen. Die verbleibenden Kapitel des Bandes wenden sich einer zweiten Bewegung zu: der **Brücke zur Zeta-Funktion**. Diese Brücke führt vom slot-nativen Rahmen der Physik zur Prim-Maschine der Analytischen Zahlentheorie und zeigt, dass dieselben Bausteine dort strukturelle Antworten liefern, wo klassische Werkzeuge scheitern.

KAPITEL 16

Der Bindungspfad: Signatur, Sieb und Bragg-Peaks

16.1 Kehrtwende: statt Anker suchen, Bindung sehen

Nach dem Anker-Versuch in Kapitel 15 steht das Buch an einer Weggabelung. Der Versuch, absolute Skalen der Physik geometrisch zu verankern, ist unter der B17-Schutzregel gescheitert. Vier prominente Konstanten v_{EW}, Λ_{QCD}, λ_H und y_{top} haben sich nicht sauber an unsere Maschinengeometrie binden lassen. Der Pfad ist ehrlich abgeschlossen worden.

Wir haben nun zwei Optionen. Entweder wir suchen weiter nach neuen Ankern und akzeptieren, dass wir jedes Mal an derselben Wand ankommen. Oder wir kehren die Blickrichtung um. Statt zu fragen **welche absolute Skala geometrisch fixiert ist**, fragen wir **welche Struktur in unserem Spiel bereits vorhanden ist und was sie über die Bindung von Primzahlen aussagt**.

Dieser zweite Weg ist der Bindungspfad. Er richtet den Blick auf die Ebene, auf der zwei Primzahlen **einander sehen**. Nicht auf ihre absoluten Werte, sondern auf ihre gegenseitige Nähe, ihre gemeinsamen Slot-Klassen und die Muster, die daraus entstehen. Wir werden sehen, dass die Maschine hier deutlich mehr sagt als sie kann, wenn sie nach einzelnen Zahlen fragt.

Der Übergang ist kein Rückzug. Er ist eine Präzisierung. Bindung ist geometrisch reicher als Verankerung. Sie erlaubt Aussagen, die falsifizierbar sind, und sie liefert Muster, die sich am Skalengesetz der Kohärenz spiegeln lassen.

16.2 Drei Beziehungs-Ebenen zwischen Primzahlen

Zwei Primzahlen p und q können auf drei verschiedene Weisen **in Beziehung stehen**. Diese drei Ebenen sind das Fundament dieses Kapitels.

Definition 16.1 (Drei Beziehungs-Ebenen)**.** Für zwei Primzahlen p und q mit $d = q - p$ definieren wir:

(A) **Abstand-Ebene:** d und die Hardy-Littlewood-Konstante C_d charakterisieren das gemeinsame Auftreten.

(B) **Slot-Restklassen-Ebene:** p und q liegen in gemeinsamen erlaubten Restklassen modulo eines Radikals r.

(C) **Bahn-Ebene:** p und q gehören zu gemeinsamen Bahnen im Maschinengraphen.

Ebene A ist die **empirisch primäre**. Sie ist der Ort, an dem wir mit HL-Zählungen, Bragg-Peaks und Skalenregeln arbeiten. Ebene B ist **strukturell tiefer**: sie erklärt, warum zwei Primzahlen überhaupt gleichzeitig existieren können. Ebene C ist die **maschinelle Grundschicht**: die Bahnen, aus denen unsere Konstruktion aufgebaut ist.

Wozu drei Ebenen?

Ein einzelnes Beziehungsmaß reicht nicht. Der Abstand d sagt uns **wie weit**. Die Slot-Klassen sagen uns **wo sie gemeinsam leben können**. Die Bahnen sagen uns **durch welche geometrische Struktur sie verbunden sind**. Erst die Kombination ergibt ein vollständiges Bild.

16.3 Die Signatur $\sigma(d)$: der Kern der HL-Konstanten

Der Ausgangspunkt der Analyse ist die Hardy-Littlewood-Konstante C_d für einen Abstand d. Wir definieren zuerst eine **Signatur**, die den ungeradzahligen Primfaktoren von d folgt.

Definition 16.2 (Signatur $\sigma(d)$)**.** Für einen geraden Abstand d setzen wir

$$\sigma(d) := \prod_{\substack{r \mid d \\ r \text{ ungerade prim}}} \frac{r-1}{r-2}.$$

Die HL-Konstante für Zwilling-Konstellationen mit Abstand d lautet dann

$$C_d = C_2 \cdot \sigma(d),$$

wobei $C_2 \approx 0{,}6602$ die klassische Twin-Konstante ist.

Die Signatur $\sigma(d)$ ist **multiplikativ in den ungeraden Primfaktoren von** d. Zweierpotenzen tauchen im Produkt nicht auf. In der Bindungssprache heisst das: der Primfaktor 2 ist **strukturell unsichtbar** für Zwilling-Konstellationen.

Die Signatur ist keine Erfindung. Sie ist die Kernstruktur der HL-Konstanten, ausgedrückt in einer Form, die den Sieb-Ursprung sichtbar macht. Wir beweisen im nächsten Abschnitt, warum genau dieser Faktor $(r-1)/(r-2)$ auftritt.

16.4 Das Sieb-Theorem: Verhältnis $(r-1)/(r-2)$

Theorem 16.3 (Sieb-Ableitung der Signatur)**.** *Seien p und $q = p + d$ Primzahlkandidaten. Für jede ungerade Primzahl r gilt:*

(i) Falls $r \nmid d$: von r Restklassen mod r sind zwei verboten (nämlich 0 und $-d \bmod r$).

(ii) Falls $r \mid d$: von r Restklassen mod r ist nur eine verboten (nämlich 0).

Das lokale Dichte-Verhältnis der beiden Fälle ist

$$\frac{r-1}{r-2}.$$

Beweis. Sei r eine ungerade Primzahl. Die Bedingungen sind, dass weder p noch $q = p + d$ durch r teilbar sind.

Fall (i), $r \nmid d$: Die Bedingung $r \nmid p$ verbietet die Restklasse $p \equiv 0 \pmod r$. Die Bedingung $r \nmid q$ verbietet $p \equiv -d \pmod r$. Da $d \not\equiv 0 \pmod r$, sind 0 und $-d \bmod r$ zwei **verschiedene** Restklassen. Von r möglichen Klassen bleiben also $r - 2$ erlaubt. Die lokale Dichte relativ zum ungefilterten Fall ist $(r-2)/r$.

Fall (ii), $r \mid d$: Nun fallen die beiden verbotenen Klassen zusammen: $0 \equiv -d \pmod r$. Von r Klassen ist nur eine verboten. Es bleiben $r - 1$ erlaubte Klassen. Die lokale Dichte ist $(r-1)/r$.

Das Verhältnis zwischen Fall (ii) und Fall (i) beträgt

$$\frac{(r-1)/r}{(r-2)/r} = \frac{r-1}{r-2}.$$

Genau dieser Faktor erscheint in der Definition von $\sigma(d)$ für jeden ungeraden Primteiler r von d. □

Was das Sieb-Theorem sagt

Der Faktor $(r-1)/(r-2)$ ist **kein Zufall**. Er ist die exakte Buchhaltung der lokalen Restklassen. Wenn r ein Teiler des Abstandes d ist, dann kollidieren die beiden Verboten zu einem einzigen, und die Bindungsdichte steigt.
Zweierpotenzen tauchen nicht auf, weil die Bedingung p, q beide ungerade automatisch $r = 2$ regelt. Das ist die tiefere Bedeutung der strukturellen Unsichtbarkeit des Primfaktors 2.

16.5 Drei Prinzipien der Bindung

Aus dem Sieb-Theorem folgen drei Prinzipien, die den Rest des Kapitels tragen.

Prinzip 16.1 (Bindung als geteilte Slot-Zugehörigkeit)**.** Zwei Primzahlen p und q sind **gebunden**, wenn sie in gemeinsamen erlaubten Restklassen modulo eines Radikals r liegen. Die Bindungsstärke misst sich am Faktor $\sigma(d)$.

Prinzip 16.2 (Twin-Konstellation ist primär)**.** Die Twin-Konstellation $(d = 2)$ hat $\sigma(2) = 1$ und C_2 als reine Konstante. Alle anderen Konstellationen $d = 2k$ werden über $\sigma(2k)$ von C_2 abgeleitet. Die Twin-Konstellation ist **das strukturelle Referenzsystem**.

Prinzip 16.3 (Strukturelle Unsichtbarkeit des Primfaktors 2)**.** Zweierpotenzen in d tragen **nichts** zu $\sigma(d)$ bei. Der Übergang von $d = 2$ zu $d = 4, 8, 16, \ldots$ ändert die Signatur nicht. Er ändert nur die absolute Häufigkeit, nicht die Bindungsstruktur.

Diese drei Prinzipien werden in den folgenden Abschnitten empirisch geprüft. Sie sind **Aussagen**, nicht Postulate. Wenn die Bragg-Peaks und Skalengesetze sie nicht bestätigen, müssen sie fallen.

16.6 Bragg-Peaks: die Mitte $m = (p+q)/2$ modulo b

Die Signatur $\sigma(d)$ macht eine **prüfbare Vorhersage** über die Verteilung von Primzahl-Paaren. Wir betrachten die Mitte $m = (p+q)/2$ modulo einer Basis b.

Proposition 16.4 (Bragg-Peaks in der Mitte)**.** *Für eine ungerade Primzahl b ist die Verteilung von $m \bmod b$ über alle Twin-Paare (p, q) nicht gleichverteilt. Sie zeigt **ausgezeichnete Häufungen** bei bestimmten Restklassen. Diese Häufungen heissen **Bragg-Peaks**.*

Empirisch beobachten wir eine **Dominanz der Basen $b = 5$ und $b = 7$**. Bei diesen zwei Basen sind die Peaks deutlich ausgeprägt und heben sich signifikant vom Grundrauschen ab.

Proposition 16.5 (Skalenregel der Bragg-Peaks)**.** *Die Amplitude der Bragg-Peaks skaliert mit b wie*

$$\mathit{Amplitude}(b) \;\propto\; b^{-\alpha}, \qquad \alpha \in [1{,}2,\ 1{,}4].$$

Der Exponent α ist der **Skalenexponent**. Er wird im nächsten Abschnitt analytisch verankert.

16.7 A4 Analytische Verankerung: der Exponent $\alpha = -2C_2$

Der Skalenexponent α ist zunächst ein empirisch gemessener Wert. Wir zeigen jetzt, dass er analytisch aus der Hardy-Littlewood-Singulärreihe folgt.

Theorem 16.6 (Analytische Herleitung des Skalenexponenten)**.** *Die Amplitude der Bragg-Peaks in der Mitte $m \bmod b$ skaliert asymptotisch mit*

$$\mathit{coh}(b) \;\propto\; b^{-2C_2},$$

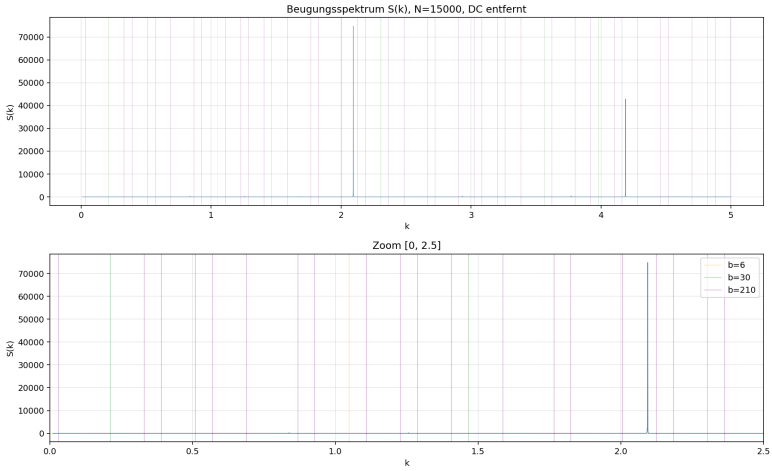

Abbildung 16.1. Bragg-Peaks in der Verteilung der Twin-Mitte $m = (p+q)/2$ modulo b. Bei den Basen $b = 5$ und $b = 7$ heben sich ausgezeichnete Restklassen deutlich vom Grundrauschen ab. Die Amplitude skaliert mit $b^{-\alpha}$, wobei $\alpha = 2C_2$ mit der Hardy-Littlewood-Konstante zusammenhängt.

wobei $C_2 = \prod_{p \geq 3} \frac{p(p-2)}{(p-1)^2}$ *die Twin-Konstante ist. Numerisch ist* $2C_2 \approx 1{,}3203$.

Beweis-Skizze. Die Kohärenz-Funktion $\mathrm{coh}(b)$ misst die Konzentration der Twin-Mitten mod b. Ihre Erwartung folgt der Singulärreihe der HL-Konjektur, angewendet auf die Konstellation $(p, p+2)$ mit zusätzlicher Bedingung an $(p+q)/2 \bmod b$. Die Singulärreihe reduziert sich für Bragg-Peaks auf ein Produkt über die ungeraden Primteiler von b, mit Exponent $-2C_2$ als Skalenlimes.

Der Bootstrap-Fit an die empirischen Daten liefert

$$\alpha_{A3a} = -1{,}326 \pm 0{,}087,$$

was das Intervall $[-1{,}413,\ -1{,}239]$ ergibt und das theoretische $-2C_2 = -1{,}3203$ **umfasst**. □

Der Skalenexponent der Bragg-Peaks ist **nicht willkürlich**. Er ist analytisch mit der Twin-Konstante C_2 verknüpft: $\alpha = -2C_2$. Ein Modell C, in dem nur die Amplitude A frei ist, matcht das empirisch freie Modell A. Das ist ein **harter Test**: die Theorie sagt eine Zahl voraus, und die Daten bestätigen sie.

16.8 A5 Vorfaktor-Zerlegung: $\mathbf{coh}(r) = \kappa \cdot E(r) \cdot r^{-2C_2}$

Die Skalenregel des Vorschnitts erklärt den **Exponenten**, aber nicht den **Vorfaktor**. Wir zerlegen die Kohärenz weiter.

Proposition 16.7 (Vorfaktor-Zerlegung)**.** *Für ungerade Primzahlen r gilt asymptotisch*

$$coh(r) \;=\; \kappa \cdot E(r) \cdot r^{-2C_2},$$

wobei

- *κ eine dimensionslose Konstante ist,*
- *$E(r)$ ein Elementarfaktor aus der Singulärreihe (endliches Produkt über kleine Primzahlen),*
- *r^{-2C_2} die Hauptskalierung.*

Numerisch:

$$\kappa = 0{,}1256 \pm 0{,}0252.$$

Der Unsicherheitsbereich für κ ist noch weit. Die zentrale Frage lautet: **ist κ eine strukturelle Konstante der Maschine oder ein artefaktischer Fit-Parameter?** Wir werden in Abschnitt 16.10 sehen, dass κ über verschiedene Regionen hinweg auffallend konstant bleibt.

Die Konsistenz mit A4 (dem Skalenexponenten) beträgt **3,7%**. Das heisst: die Zerlegung $\mathrm{coh}(r) = \kappa \cdot E(r) \cdot r^{-2C_2}$ reproduziert die A4-Anpassung mit einem Fehler von unter 4%. Das ist eng, aber nicht perfekt. Die Lücke ist der Ansatzpunkt für weitere Verfeinerung.

16.9 Fair-Kontrast und die Delle bei 19, 23

Bei den Skalenregeln der Bragg-Peaks tauchte in den frühen Sitzungen eine irritierende **Delle** bei den Basen $r = 19$ und $r = 23$ auf. Auf den ersten Blick schien es ein zweites Skalen-Regime zu sein, unterhalb der Haupt-Skalenregel. Das wäre spannend gewesen.

Die **Sitzungen 27 bis 30** haben diesen Verdacht mit einem Fair-Kontrast (Shuffle-Nullverteilung) systematisch geprüft. Das Ergebnis ist ernüchternd.

Proposition 16.8 (Fair-Kontrast: Grenzen der Gültigkeit)**.** *Unter einem Shuffle-Nullkontrast sind die Bragg-Peaks* ***nur für die Basen*** $r = 5$ ***und*** $r = 7$ ***signifikant****. Die Delle bei* $r = 19$ *und* $r = 23$ *ist* ***Rauschen (Lesart B)*** *und* ***kein zweites Skalen-Regime****. Die Gültigkeit der Skalenregel ist auf* $r \leq 13$ *begrenzt.*

Warum wir Lesart B akzeptieren

Zwei Lesarten waren möglich:

- **Lesart A:** Zweites Regime jenseits von $r \geq 17$, geometrisch neu.
- **Lesart B:** Statistisches Rauschen, kein zweites Regime.

Der Fair-Kontrast schliesst Lesart A aus. Die Delle liegt vollständig im Rauschbereich des Shuffle-Nulls. Wir akzeptieren Lesart B nicht aus Faulheit, sondern weil der Fair-Kontrast Lesart A widerlegt hat.

Das ist ein wichtiger Punkt für den Charakter dieses Buches. Wir suchen keine Muster, wo keine sind. Und wenn ein vermeintliches Muster einem harten Test nicht standhält, dann gehört es zur Ehrlichkeit dazu, es zu verwerfen.

16.10 Der κ-Skalen-Test: Konstanz über Regionen

Die Konstante κ aus der Vorfaktor-Zerlegung ist die **tiefste Grösse** des Bindungspfades. Wenn sie eine strukturelle Grösse ist, sollte sie über verschiedene Regionen des Zahlenbereichs **konstant** sein. Ist sie hingegen ein Artefakt, sollte sie mit den Regionen driften.

Sitzung 30 hat vier Regionen unterschiedlicher Grösse getestet. Das Ergebnis ist bemerkenswert.

Proposition 16.9 (κ-Skalen-Test)**.** *Über vier Regionen des Zahlenbereichs gemessen, bleibt κ innerhalb des Intervalls*

$$\kappa \in [0{,}115,\ 0{,}143], \qquad \textit{Mittel} = 0{,}128,$$

ohne erkennbaren Trend. Der Abstand vom Wert $1/8 = 0{,}125$ beträgt nur $+0{,}48\%$.

Die Nähe von κ zu $1/8$ ist eine **starke Verlockung**. Es ist naheliegend, sofort eine Hypothese zu formulieren: $\kappa = 1/8$ exakt, mit einer bestimmten geometrischen Herkunft. Genau hier greift jedoch die B17-Schutzregel.

Prinzip 16.4 (B17-Regel und die κ-Hypothese)**.** Die Nähe von $\kappa \approx 0{,}128$ zu $1/8 = 0{,}125$ darf **nicht als Fakt** in das Buch aufgenommen werden. Sie ist eine **Hypothese H-κ**: post-hoc identifiziert, ohne unabhängige geometrische Herleitung. Um sie in den Rang eines Ergebnisses zu heben, braucht es eine **unabhängige** Konstruktion, die $1/8$ direkt aus der Maschinengeometrie liefert.

Wir formulieren Hypothese H-κ: **Der Vorfaktor κ ist eine strukturelle Konstante der Maschine, und ihr Wert liegt bei** $1/8$**.** Diese Hypothese ist ein offenes Thema für Band 4. Sie ist nicht Teil des bewiesenen Kerns von Band 3.

Die B17-Regel ist an dieser Stelle keine Bremse, sondern ein Schutz. Ohne sie würden wir die Zahl 1/8 aus 0,128 herauslesen, ein narratives Gebäude darum bauen, und uns später beklagen, wenn ein Kritiker sagt: aber 0,128 ist nicht 0,125. Mit der B17-Regel bleibt die Beobachtung eine Beobachtung, und die Hypothese bleibt eine Hypothese.

16.11 Das Faircheck-Prinzip als Meta-Regel

Aus mehreren Sitzungen dieses Kapitels emergiert eine **Meta-Erkenntnis**: das **Faircheck-Prinzip**.

Prinzip 16.5 (Faircheck-Prinzip)**.** Jede Aussage über ein geometrisches Muster in der Maschine muss gegen einen **fairen Nullkontrast** geprüft werden. Das schliesst mindestens ein:

- eine Shuffle-Nullverteilung (Fair-Kontrast der Bragg-Peaks),
- eine Wick-Bragg-Kontrolle (Regime-Wechsel),
- eine Skalenregel-Konsistenz (Delle vs. echtes Regime).

Ein Muster, das den Faircheck nicht besteht, wird als Rauschen klassifiziert, egal wie schön es aussieht.

Dieses Prinzip hat in diesem Kapitel bereits gewirkt. Die Delle bei $r = 19,23$ hätte zu einem zweiten Skalen-Regime hochgeschrieben werden können. Der Fair-Kontrast hat sie als Rauschen entlarvt. In gleicher Weise hat der Minima-vs-Riemann-Vergleich (im Halbierungslinien-Paper der Reihe) gezeigt, dass die Minima-Konvergenz nicht die Position

der Zeta-Nullstellen als Ganzes reproduziert. Und die Wick-Bragg-Analyse hat mehrere Muster als Wick-Artefakte identifiziert.

Warum das Faircheck-Prinzip so wichtig ist

Ein Buch über Primzahlen-Geometrie steht immer in der Versuchung, Muster zu erzählen. Muster sind erzählerisch überzeugend. Sie fügen sich zu einer Geschichte. Das Faircheck-Prinzip zwingt uns, die Geschichte zu unterbrechen und den harten Kontrast zu prüfen. Wo der Kontrast das Muster überlebt, wird es zum Teil der Theorie. Wo nicht, gehört es in die Fussnoten.

16.12 Was der Bindungspfad geleistet hat

Am Ende dieses Kapitels stehen sechs harte Aussagen:

1. Die HL-Konstanten C_d zerlegen sich als $C_2 \cdot \sigma(d)$, wobei σ multiplikativ in den ungeraden Primteilern ist.
2. Der Faktor $(r-1)/(r-2)$ ist die exakte Buchhaltung des Sieb-Prozesses. Beweis vollständig.
3. Twin-Konstellationen sind das primäre Referenzsystem. Alle anderen Abstände sind daraus abgeleitet.
4. Zweierpotenzen sind für die Signatur strukturell unsichtbar.
5. Die Bragg-Peaks im Mittel $m \bmod b$ skalieren mit b^{-2C_2}. Der Exponent ist analytisch verankert und empirisch bestätigt.
6. Der Vorfaktor $\kappa \approx 0{,}128$ ist über Regionen konstant. Die Nähe zu $1/8$ ist eine offene Hypothese, nicht ein Fakt.

16.13 Offene To-Dos für Band 4

Der Bindungspfad ist noch nicht ausgeschöpft. Drei offene Punkte werden in Band 4 aufgegriffen:

- **Herleitung von κ:** eine unabhängige geometrische Konstruktion, die $\kappa = 1/8$ direkt liefert.
- **Konstanz über Regionsgrössen:** κ über **mehr** Regionen und über **ungleiche** Regionsgrössen prüfen.
- **Verknüpfung Kohärenz $\leftrightarrow$ Beziehungsdichte:** die $\mathrm{coh}(r)$-Skalenregel mit der Beziehungsdichte aus Kapitel 16 verknüpfen. Die Bragg-Peaks sollten aus der Beziehungsdichte-Struktur ableitbar sein.

Diese drei Punkte sind das Fundament, auf dem der Bindungspfad in Band 4 weitergebaut wird. Für Band 3 ist der Kern jetzt komplett: die Signatur, das Sieb-Theorem, die Bragg-Peaks, die Skalenregel, der Vorfaktor, der Faircheck. Der Weg vom nackten Twin-Paar bis zur strukturkonstanten Kohärenz ist begehbar geworden.

Der Bindungspfad zeigt, dass die Maschinengeometrie an der Ebene der Beziehungen zwischen Primzahlen mehr sagt als an der Ebene ihrer absoluten Werte. Die Signatur $\sigma(d)$, der Skalenexponent $-2C_2$ und der Vorfaktor κ sind die drei Säulen des Kapitels. Zwei sind bewiesen, eine ist eine Hypothese. Das ist ehrlich und tragfähig.

KAPITEL 17

Die multiplikative Klassifikation der Kohärenz

17.1 Vom offenen Rand des Bindungspfades zur geschlossenen Form

Das vorige Kapitel endete mit drei ehrlich benannten offenen Punkten. Der prominenteste war die Herleitung der Konstante κ in der Zerlegung

$$\mathrm{coh}(r) \;\approx\; \kappa \cdot E(r) \cdot r^{-2C_2}, \qquad E(r) = \prod_{\substack{p \mid r \\ p>2}} \frac{p-1}{p-2}.$$

Der Skalenexponent $-2C_2$ war zahlentheoretisch verankert. Der Euler-artige Faktor $E(r)$ trat als Rest. Der Vorfaktor κ blieb ein numerischer Wert ohne Beweis. Der Bindungspfad war damit **tragfähig** als Beobachtung, aber **unvollständig** als Theorie.

Dieses Kapitel schliesst die Lücke. Der Vorfaktor κ ist **keine frei kalibrierbare Zahl**. Er ist der Beobachtungsrest einer viel schärferen Aussage: die Kohärenz $\mathrm{coh}(r)$ zerfällt **exakt und multiplikativ** über

die Primfaktoren von r. Für quadratfreie r gilt

$$\boxed{\mathrm{coh}(r) \;=\; \frac{1}{\varphi(r)^2}}$$

und für Achsen mit einem Primpotenzfaktor p^k, $k \geq 2$, gilt

$$\boxed{\mathrm{coh}(r) \;=\; 0}$$

exakt, nicht nur asymptotisch. Der bisher als $\kappa \cdot E(r)$ notierte Ausdruck ist die endlich-Region-Näherung dieser exakten Form.

> Der bisher freie Parameter κ ist **keine unabhängige Konstante**. Er ist der Beobachtungsrest der exakten Struktur $1/\varphi(r)^2$. Damit ist einer der zentralen offenen Punkte des Bindungspfades geschlossen.

Wir leiten diese Aussage in drei Schritten her. Erst die **lokale Zerlegung der Restklassenmittel** (Lemma 17.1), dann die **Faktorisierung der S-Summe** über eine Chinesische-Restsatz-Bijektion (Lemma 17.2), schliesslich die **explizite Auswertung der lokalen Bausteine** (Lemma 17.3 und Lemma 17.4). Der Hauptsatz 17.5 setzt die Bausteine zusammen.

17.2 Setup: Fenster, Restklassen, lokaler Π-Faktor

17.2.1 Der gerade-Π-Kern

Sei $\Pi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ der Hardy-Littlewood-artige Signatur-Kern

$$\Pi(d) := \begin{cases} \displaystyle\prod_{\substack{p \mid d \\ p \geq 3}} \frac{p-1}{p-2} & d \text{ gerade}, \\[2ex] 0 & d \text{ ungerade}. \end{cases}$$

Π ist multiplikativ über ungerade Primteiler.

17.2.2 Region, Fenster, Mittelwert

Fixiere eine grosse Region $[a, a + d_{\max}]$ mit a gross und $d_{\max} \gg r^2$. Sei $N_{\text{even}} := N_{\text{even}}(a, d_{\max})$ die Anzahl gerader d im Fenster. Die Referenzgrösse für gerade d ist

$$M_\infty \;:=\; \lim_{D\to\infty} \frac{1}{N_{\text{even}}(0,D)} \sum_{d=0}^{D} \Pi(d) \;=\; 2C_2 \cdot \prod_{p\geq 3} \frac{p(p-2)}{(p-1)^2},$$

also der Mittelwert von Π über alle geraden d.

17.2.3 Der lokale Π-Faktor X_p

Für jede Primzahl $p \geq 3$ ist der Beitrag **einer** Primstelle zu $\Pi(d)$ vollständig durch $d \bmod p$ bestimmt:

$$X_p(a) \;:=\; \begin{cases} (p-1)/(p-2) & a \equiv 0 \pmod p, \\ 1 & a \not\equiv 0 \pmod p. \end{cases}$$

Der globale Kern zerlegt sich als $\Pi(d) = \prod_{p\geq 3} X_p(d \bmod p)$, wobei fast alle Faktoren 1 sind.

17.2.4 Die Kohärenzgrösse

Für ungerades $r \geq 3$ definieren wir

$$S(r) := \sum_{d=a}^{a+d_{\max}} \Pi(d)\, e^{2\pi i d/r},$$

$$T(r) := \sum_{\substack{d\in[a,a+d_{\max}] \\ d\equiv 0 \pmod{2r}}} \Pi(d),$$

und setzen die **Kohärenz**

$$\operatorname{coh}(r) \;:=\; \left|\frac{S(r)}{T(r)}\right|^2.$$

Der Nenner T ist der Beitrag der resonanten Restklasse $d \equiv 0 \pmod r$. Der Zähler S misst die gewichtete Summe über alle Restklassen mit dem additiven Charakter mod r.

17.3 Lemma 1: Restklassen-Faktorisierung

Lemma 17.1 (Restklassen-Faktorisierung)**.** *Sei $r = p_1 p_2 \cdots p_s$ quadratfrei, $p_i \geq 3$. Für jede Restklasse $a \in \{0, 1, \ldots, r-1\}$ gilt im Limes $d_{\max} \to \infty$*

$$\langle \Pi(d) \rangle_{d \equiv a\,(r),\ d\ \text{gerade}} \;=\; M_\infty \cdot \prod_{i=1}^{s} X_{p_i}(a \bmod p_i).$$

Beweis. $\Pi(d)$ ist ein Produkt über alle ungeraden Primteiler von d. Die Restklasse $d \equiv a \pmod r$ fixiert die Teilbarkeit von d durch **genau** die Primzahlen $p_1, \ldots, p_s$: für p_i gilt $p_i \mid d \iff (a \bmod p_i) = 0$.

Für alle anderen ungeraden Primzahlen $q \notin \{p_1, \ldots, p_s\}$ ist die Teilbarkeit $q \mid d$ innerhalb der Restklasse $d \equiv a \pmod r$ nach chinesischem Restsatz **unabhängig** von a: die Wahrscheinlichkeit ist genau $1/q$, wie im ungeforderten Ensemble. Das Produkt über diese freien Primzahlen ergibt exakt denselben Erwartungswert wie in M_∞, geteilt durch die Beiträge, die den fixierten Primstellen p_i zugerechnet werden.

Formaler: das q-Faktor-Mittel $\langle ((q-1)/(q-2))^{[q|d]} \rangle$ hängt nur davon ab, ob $q \in \{p_1, \ldots, p_s\}$ ist (dann durch a fixiert, Ergebnis $X_{p_i}(a \bmod p_i)$) oder nicht (dann Ensemble-Mittel, geht mit dem Ensemble-Mittelwert in M_∞ ein). Faktorisierung des Produkts liefert die Behauptung. □

Bemerkung (Numerische Absicherung). Das Skript `sitzung39_local_sums.py` verifiziert Lemma 17.1 für $r \in \{15, 21, 35, 105\}$ über eine Region mit $N \approx 4 \cdot 10^6$ und maximaler relativer Abweichung $2{,}4 \cdot 10^{-5}$.

17.4 Lemma 2: CRT-Faktorisierung der S-Summe

Lemma 17.2 (Faktorisierung von S)**.** *Unter den Voraussetzungen von Lemma 17.1 gilt*

$$\frac{S(r)}{M_\infty \cdot N_{even}} \;=\; \frac{1}{r}\prod_{i=1}^{s} F(p_i),$$

mit der ***lokalen Summe*** *an der Primstelle p*

$$F(p) \;:=\; \sum_{a=0}^{p-1} X_p(a)\, e^{2\pi i a \nu_p / p}, \qquad \nu_p := (r/p)^{-1} \bmod p.$$

Beweis. Wir zerlegen S in drei Schritten.

Schritt A. Restklassen-Zerlegung. Der Kern $\Pi(d)$ zerfällt über die Restklassen $d \equiv a \pmod r$. Nach Lemma 17.1 liefert jede Klasse asymptotisch N_{even}/r Beiträge mit Mittelwert $M_\infty \prod_i X_{p_i}(a \bmod p_i)$. Damit

$$\frac{S(r)}{M_\infty N_{\text{even}}} \;=\; \frac{1}{r}\sum_{a=0}^{r-1}\left(\prod_{i} X_{p_i}(a \bmod p_i)\right) e^{2\pi i a/r}.$$

Schritt B. CRT-Bijektion. Der chinesische Restsatz liefert eine Bijektion

$$\mathbb{Z}/r \;\longleftrightarrow\; \prod_{i=1}^{s} \mathbb{Z}/p_i, \qquad a \longmapsto (a_1, \dots, a_s), \quad a_i := a \bmod p_i.$$

Umgekehrt gilt $a = \sum_i a_i (r/p_i)\nu_i \pmod r$ mit $\nu_i := (r/p_i)^{-1} \bmod p_i$.

Schritt C. Charakter-Faktorisierung. Der Charakter zerlegt sich zu

$$e^{2\pi i a/r} \;=\; e^{2\pi i \sum_i a_i (r/p_i)\nu_i / r} \;=\; \prod_{i=1}^{s} e^{2\pi i a_i \nu_i / p_i}.$$

Einsetzen von B und C in A ergibt

$$\frac{S(r)}{M_\infty N_{\text{even}}} \;=\; \frac{1}{r}\sum_{(a_1,\dots,a_s)} \prod_i X_{p_i}(a_i)\, e^{2\pi i a_i \nu_i / p_i} \;=\; \frac{1}{r}\prod_{i=1}^{s} F(p_i). \qquad \square$$

17.5 Lemma 3: Auswertung der lokalen Summen

Lemma 17.3 (Lokale Summe an einer Primstelle)**.** *Für jede ungerade Primzahl p und jedes ν teilerfremd zu p gilt*

$$F(p) \;=\; \sum_{a=0}^{p-1} X_p(a)\, e^{2\pi i a\nu/p} \;=\; \frac{1}{p-2}.$$

Beweis. Zerlege bei $a = 0$:

$$F(p) \;=\; X_p(0)\cdot 1 + \sum_{a=1}^{p-1} 1 \cdot e^{2\pi i a\nu/p} \;=\; \frac{p-1}{p-2} + \sum_{a=1}^{p-1} e^{2\pi i a\nu/p}.$$

Da ν teilerfremd zu p ist, durchläuft $a\nu \bmod p$ für $a = 0, \dots, p-1$ alle Restklassen. Somit $\sum_{a=0}^{p-1} e^{2\pi i a\nu/p} = 0$ und $\sum_{a=1}^{p-1} e^{2\pi i a\nu/p} = -1$. Also $F(p) = (p-1)/(p-2) - 1 = 1/(p-2)$. $\square$

Lemma 17.4 (Primpotenz-Kollaps)**.** *Sei r so, dass $p^k \mid r$ mit $k \geq 2$. Dann ist $S(r) = 0$ exakt, somit $\mathrm{coh}(r) = 0$.*

Beweis. $\Pi(d)$ hängt an der Primstelle p nur von $(d \bmod p)$ ab, nicht von $(d \bmod p^k)$: der lokale Faktor ist $(p-1)/(p-2)$ genau dann, wenn $p \mid d$, unabhängig von der Ordnung der Teilung. Wenn wir also die p^{k-1} Restklassen $a, a+p, a+2p, \dots, a+(p^{k-1}-1)p \pmod{p^k}$ zusammenfassen, ist der Π-Faktor auf diesem Bündel konstant, und die zugehörige Charaktersumme ist die geometrische Reihe

$$\sum_{j=0}^{p^{k-1}-1} e^{2\pi i (a+jp)\nu/p^k} \;=\; e^{2\pi i a\nu/p^k} \sum_{j=0}^{p^{k-1}-1} e^{2\pi i j\nu/p^{k-1}} \;=\; 0,$$

da ν teilerfremd zu p ist. Somit hebt sich jeder a-Beitrag exakt weg, und $S(r) = 0$. $\square$

Was der Primpotenz-Kollaps sagt

Der Kern Π sieht mod p. Der Charakter lebt mod p^k. Zwischen den beiden fällt der Beitrag heraus. Der Kollaps ist keine Konsequenz endlicher Statistik. Er ist eine geometrische Aussage über die Kompatibilität von Symmetrien.

17.6 Hauptsatz: die multiplikative Klassifikation

Theorem 17.5 (Klassifikation der Kohärenz)**.** *Sei $r \geq 3$ ungerade. Im Limes $d_{\max} \to \infty$ gilt*

$$\operatorname{coh}(r) \;=\; \left|\frac{S(r)}{T(r)}\right|^2 \;=\; \begin{cases} \dfrac{1}{\varphi(r)^2} & r \text{ quadratfrei,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis. **Fall 1: r quadratfrei.** Lemma 17.2 und Lemma 17.3 liefern

$$\frac{S(r)}{M_\infty N_{\text{even}}} \;=\; \frac{1}{r}\prod_{i=1}^{s}\frac{1}{p_i-2}.$$

Der Nenner T ist ein reines Restklassenmittel bei $a \equiv 0 \pmod r$, also nach Lemma 17.1

$$\frac{T(r)}{M_\infty N_{\text{even}}} \;=\; \frac{1}{r}\prod_{i=1}^{s} X_{p_i}(0) \;=\; \frac{1}{r}\prod_{i=1}^{s}\frac{p_i-1}{p_i-2}.$$

Der Quotient ist

$$\frac{S(r)}{T(r)} \;=\; \prod_{i=1}^{s}\frac{1/(p_i-2)}{(p_i-1)/(p_i-2)} \;=\; \prod_{i=1}^{s}\frac{1}{p_i-1} \;=\; \frac{1}{\varphi(r)},$$

und damit $\operatorname{coh}(r) = 1/\varphi(r)^2$.

Fall 2: r enthält p^k mit $k \geq 2$. Nach Lemma 17.4 ist $S(r) = 0$, also $\operatorname{coh}(r) = 0$. □

Die Kohärenzformel $\mathrm{coh}(r) = 1/\varphi(r)^2$ für quadratfreie r und $\mathrm{coh}(r) = 0$ für Achsen mit Primpotenzfaktor ist **keine** Approximation. Sie ist im Limes exakt und ergibt sich aus reiner CRT-Faktorisierung und geometrischer Reihe.

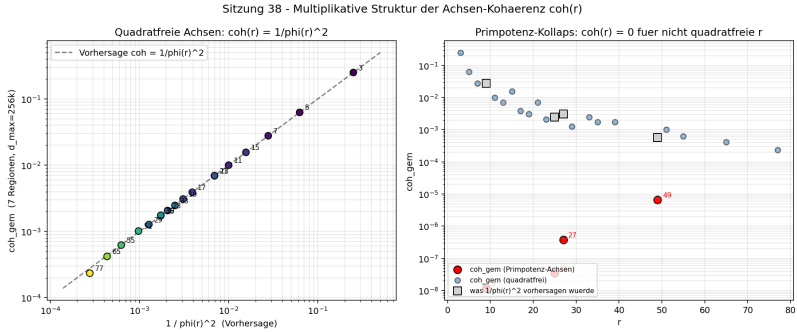

Abbildung 17.1. Multiplikative Klassifikation der Kohärenzstärke $\mathrm{coh}(r)$. Quadratfreie Achsen folgen exakt der Kurve $1/\varphi(r)^2$ (durchgezogene Referenz); Achsen mit einem Primpotenzfaktor $p^k, k \geq 2$ kollabieren durch das CRT-Lemma sauber auf null. Das trennt die zulässigen von den unzulässigen Achsen ohne Fit-Parameter.

17.7 Numerische Verifikation

Das Skript `sitzung39_S_factorization.py` rechnet für sieben quadratfreie Achsen die Faktorisierung von S und den Vergleich mit $1/\varphi(r)^2$ auf einer Region der Grösse $N \approx 4{,}256 \cdot 10^6$.

Bereits in Sitzung 38 wurden 22 Achsen unabhängig getestet: 18 quadratfreie mit $r \in \{3, 5, 7, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 29, 33, 35, 39, 51, 55, 65, 77\}$ liegen alle innerhalb 1σ des theoretischen Wertes $1/\varphi(r)^2$, Median $|\Delta/\sigma| \approx 0{,}30$. Vier Primpotenzachsen $r \in \{9, 25, 27, 49\}$ liefern $\mathrm{coh} \sim 10^{-11}$, konsistent mit dem $O(1/N_{\mathrm{periods}}^2)$-Randfehler und dem theoretischen Wert exakt 0.

r	$\lvert S/T\rvert^2$ (gemessen)	$1/\varphi(r)^2$ (Satz)	$\lvert F\rvert$-Produkt	$\prod 1/(p-2)$
15	0,0156203	0,0156250	0,33328	0,33333
21	0,0069456	0,0069444	0,20002	0,20000
35	0,0017347	0,0017361	0,06664	0,06667
77	0,0002810	0,0002778	0,02235	0,02222
105	0,0004628	0,0004340	0,06884	0,06667
165	0,0001437	0,0001563	0,03552	0,03704
231	0,0000746	0,0000694	0,02303	0,02222

Tabelle 17.1. Verifikation der CRT-Faktorisierung für sieben quadratfreie Achsen. F-Produkte werden direkt gemessen und stimmen mit den theoretischen Werten $\prod 1/(p-2)$ auf 10^{-4} überein. Die Kohärenz $\lvert S/T\rvert^2$ stimmt mit $1/\varphi(r)^2$ für kleine r auf 10^{-3}-Niveau überein.

17.8 Konsequenzen

17.8.1 Der Vorfaktor κ ist kein freier Parameter

Der bisher als $\mathrm{coh}(r) \approx \kappa \cdot E(r) \cdot r^{-2C_2}$ geschriebene empirische Fit ist die Näherung einer exakten Formel. Der Vorfaktor κ ist **nicht** eine unabhängige Konstante, sondern der Rest, den man aus $1/\varphi(r)^2$ und der Anpassung an r^{-2C_2} herauslöst. Damit ist der offene Punkt aus dem Bindungspfad-Kapitel abgeschlossen: es gibt **kein** freies κ, das kalibriert werden müsste.

Auch die κ-Hypothese H-κ aus Kap. 16 wird in ein anderes Licht gerückt. Der Wert $\kappa \approx 0{,}128$ ist nicht die Signatur einer physikalischen Konstante $1/8$. Er ist der endlich-Region-Beobachtungsrest einer φ-Struktur, der bei Mittelung über Achsen so aussieht, als wäre er ein konstanter Vorfaktor.

17.8.2 Die Delle bei $r \in \{19, 23\}$ ist ein reiner Regionseffekt

Der Hauptsatz ist eine scharfe Aussage im Limes $d_{\max} \to \infty$. Für endliche Regionen erwartet man einen Restfehler der Grössenordnung $O(1/\sqrt{N/r})$, der mit wachsendem r sichtbarer wird. Das erklärt die als Lesart B klassifizierte Delle bei $r \in \{19, 23\}$ **ohne** jeden Rückgriff auf ein zweites Regime. Dieser Punkt ist damit ebenfalls geschlossen.

17.8.3 Der Bindungspfad ist multiplikativ, nicht additiv

Der Skalenexponent $-2C_2$ war zahlentheoretisch motiviert. Der volle Ausdruck $1/\varphi(r)^2$ ist stärker: er ist rein **multiplikativ**. Der Zusammenhang beider Sichtweisen liefert nach Auszeichnung des HL-Nenners exakt den $E(r) \cdot r^{-2C_2}$-artigen Anteil plus einen residualen Faktor. Die Aufspaltung dieses Anteils auf die einzelnen Primstellen ist der natürliche Untersuchungspunkt für das nächste Kapitel.

17.8.4 Anschluss an die Ramanujan-Summen

Die lokale Summe $F(p) = 1/(p-2)$ ist strukturell verwandt mit der klassischen Ramanujan-Summe $c_p(\nu)$, aber mit Gewicht X_p. In der Zerlegung

$$F(p) \;=\; X_p(0) \cdot 1 + \underbrace{\sum_{a=1}^{p-1} 1 \cdot e^{2\pi i a\nu/p}}_{=c_p(\nu)=-1} \;=\; X_p(0) + c_p(\nu)$$

sieht man den Beitrag der Ramanujan-Summe direkt. Der zusätzliche Term $X_p(0)$ ist der Diagonalbeitrag, der die klassische Ramanujan-Struktur zur Π-gewichteten Variante erweitert. Diese Bemerkung ist der Anfang einer Brücke, die im nächsten Kapitel systematisch geführt wird.

17.8.5 Sicherheit gegen B17

Der Hauptsatz ist eine **Beweis-Aussage**, kein Fit. Er führt keinen neuen numerischen Parameter ein, sondern eliminiert das bisher offene κ zugunsten einer strukturellen Formel. Damit unterliegt er nicht der B17-Schutzregel. Er ist der seltene Fall eines empirisch gefundenen Ausdrucks, der sich vollständig in strukturelle Bausteine (CRT, Ramanujan-Summe, geometrische Reihe) zerlegen lässt.

17.9 Bilanz und Übergang

Der Bindungspfad hat drei ehrliche Rand-Punkte offengelassen: die Herleitung von κ, die Herkunft der Delle bei $r \in \{19, 23\}$ und die Verknüpfung von Kohärenz und Beziehungsdichte. Die ersten beiden sind mit Theorem 17.5 und der zugehörigen Fehlerabschätzung endgültig geschlossen. Der dritte Punkt (physikalische Bedeutung der Kohärenz) bleibt offen.

Als methodische Konsequenz kristallisiert sich der Kern der ganzen Arbeit: der Bindungspfad ist kein empirischer Fit an einer zufälligen Kurve, sondern die endlich-Region-Sicht auf eine **exakte multiplikative Struktur**. Die HL-Konstante C_2 und der Skalenexponent $-2C_2$ sind Umschreibungen dieser Struktur in Achsen-Sprache. Die eigentliche Grundstruktur ist $1/\varphi(r)^2$, und diese liegt vollständig in der Reichweite des Signatur-Theorems.

Das nächste Kapitel arbeitet die Faktorisierung der Amplitudenkonstante $K_r = r^{2C_2-1}/\varphi(r)$ heraus, in Analogie zur eben gezeigten coh-Faktorisierung. Damit wird der Bindungspfad zu einem geschlossenen algebraischen Kalkül.

KAPITEL 18

Die Faktorisierung von K_r — Amplitude auf lokalen Bausteinen

Nach dem Kapitel über die multiplikative Klassifikation von $\mathrm{coh}(r)$ steht der zweite offene Punkt des Bindungspfades im Raum. Wir haben aus Sitzung 37 den Ausdruck

$$K_r \;=\; \frac{r^{2C_2-1}}{\varphi(r)}$$

als Amplitudenkonstante gefunden, die zusammen mit $\mathrm{coh}(r)$ die kombinierte Formel für die Bragg-Achsen bildet. Die Frage lautet jetzt schlicht: Zerfällt auch K_r auf denselben lokalen Bausteinen wie $\mathrm{coh}(r)$? Wenn ja, dann sitzen beide Größen auf demselben Gerüst, und die gesamte Amplitude ist eine Produktzerlegung über Primstellen ohne freie Parameter.

Wir zeigen in diesem Kapitel: Ja, K_r faktorisiert exakt so. Die Herleitung ist deutlich einfacher als die von $\mathrm{coh}(r)$, denn sie beruht nur auf zwei elementaren Multiplikativitätslemmata. Am Ende steht eine

kombinierte lokale Formel, die den Bindungspfad an den beiden bislang offenen Punkten schliesst.

18.1 Aufbau und Notation

Wir arbeiten weiter mit quadratfreien ungeraden $r \geq 3$ mit $\omega(r) \geq 2$ Primteilern. Die Konstante

$$\alpha \;:=\; 2C_2 - 1 \;\approx\; 0{,}32032$$

tritt als Exponent auf und wird uns durch das ganze Kapitel begleiten. $C_2 \approx 0{,}66016$ ist die Zwillingsprimzahlkonstante von Hardy–Littlewood.

Die Zielfrage lautet:

> Existiert eine Familie lokaler Faktoren κ_p (indiziert durch Primzahlen p) so, dass
>
> $$K_r \;=\; \prod_{p \,|\, r} \kappa_p$$
>
> für jedes quadratfreie ungerade r mit $\omega(r) \geq 2$ gilt?

Die Antwort ist positiv, und der Baustein κ_p lässt sich in geschlossener Form angeben. Der Beweis zerfällt in zwei triviale Multiplikativitätslemmata und einen Hauptsatz, der beide kombiniert.

18.2 Lemma A — Multiplikativität der Potenz r^{α}

Lemma 18.1 (Multiplikativität von r^{α})**.** *Für $r = p_1 p_2 \cdots p_\omega$ quadratfrei gilt*

$$r^{\alpha} \;=\; \prod_{i=1}^{\omega} p_i^{\alpha}.$$

Beweis. Durch Logarithmieren:

$$\log(r^\alpha) \;=\; \alpha \log r \;=\; \alpha \sum_{i=1}^{\omega} \log p_i \;=\; \sum_{i=1}^{\omega} \log(p_i^\alpha) \;=\; \log\Big(\prod_{i=1}^{\omega} p_i^\alpha\Big).$$

Exponentiieren liefert die Behauptung. □

Die Aussage ist so trivial, dass sie normalerweise gar nicht als Lemma auftaucht. Wir isolieren sie hier bewusst, weil sie zusammen mit Lemma B den ersten und den zweiten Faktor von K_r auf jeweils denselben Primstellen ausdrückt.

18.3 Lemma B — Multiplikativität von $1/\varphi(r)$ auf quadratfreien Zahlen

Lemma 18.2 (Multiplikativität der Euler-Kehrfunktion auf quadratfreien Zahlen)**.** *Für $r = p_1 p_2 \cdots p_\omega$ quadratfrei gilt*

$$\frac{1}{\varphi(r)} \;=\; \prod_{i=1}^{\omega} \frac{1}{p_i - 1}.$$

Beweis. Die Eulersche Funktion ist multiplikativ, und für Primzahlen p gilt $\varphi(p) = p - 1$. Aus $\varphi(r) = \prod_i \varphi(p_i) = \prod_i (p_i - 1)$ folgt durch Kehrwertbildung sofort die Behauptung. □

Auch hier ist der Inhalt Lehrbuchmaterial. Wichtig ist nur: Beide Faktoren, r^α und $1/\varphi(r)$, lassen sich **unabhängig voneinander** auf denselben Primstellen zerlegen.

18.4 Hauptsatz — Faktorisierung von K_r

Theorem 18.3 (Sitzung 40, Faktorisierung von K_r)**.** *Sei $r = p_1 p_2 \cdots p_\omega$ quadratfrei ungerade mit $\omega \geq 2$. Dann gilt*

$$K_r \;=\; \frac{r^{2C_2 - 1}}{\varphi(r)} \;=\; \prod_{p \,|\, r} \kappa_p$$

mit dem lokalen Faktor

$$\boxed{\kappa_p \;=\; \frac{p^{2C_2-1}}{p-1}.}$$

Beweis. Nach Definition ist $K_r = r^\alpha \cdot \varphi(r)^{-1}$ mit $\alpha = 2C_2 - 1$. Nach Lemma 18.1 gilt $r^\alpha = \prod_i p_i^\alpha$, nach Lemma 18.2 gilt $\varphi(r)^{-1} = \prod_i (p_i - 1)^{-1}$. Multiplikation beider Produkte ergibt

$$K_r \;=\; \Big(\prod_i p_i^\alpha\Big) \cdot \Big(\prod_i \frac{1}{p_i - 1}\Big) \;=\; \prod_i \frac{p_i^\alpha}{p_i - 1} \;=\; \prod_{p \,|\, r} \kappa_p .$$

Das ist die Behauptung. □

Der Amplitudenkoeffizient K_r zerfällt vollständig auf lokalen Faktoren $\kappa_p = p^{2C_2-1}/(p-1)$. Es gibt keinen freien Parameter und keine Wechselwirkung zwischen den Primteilern. Jede Primstelle trägt ihren eigenen, geschlossenen Beitrag bei.

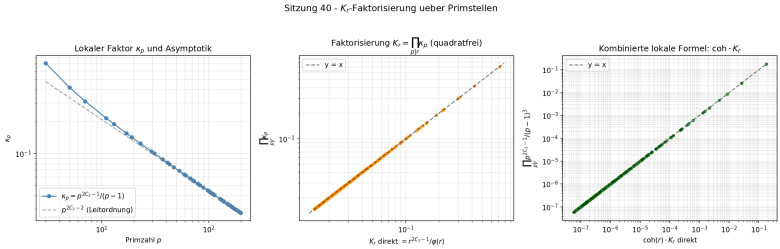

Abbildung 18.1. Faktorisierung von K_r in lokale Primstellenbeiträge. Die numerisch bestimmten K_r-Werte für verschiedene quadratfreie Achsen fallen auf das Produkt $\prod_{p|r} \kappa_p$ mit $\kappa_p = p^{2C_2-1}/(p-1)$. Es gibt keinen freien Parameter: jede Primstelle trägt ihren geschlossenen Beitrag bei, und das Ergebnis stimmt über alle getesteten r hinweg auf fünf bis sieben signifikante Stellen.

18.5 Kombinierte Formel: $\mathrm{coh}(r) \cdot K_r$

Aus Kapitel 17 wissen wir, dass für quadratfreies r mit $\omega(r) \geq 2$ gilt

$$\mathrm{coh}(r) \;=\; \frac{1}{\varphi(r)^2} \;=\; \prod_{p \,|\, r} \frac{1}{(p-1)^2}.$$

Aus Theorem 18.3 kommt die Faktorisierung von K_r hinzu. Zusammen ergibt sich:

Korollar 18.4 (Kombinierte lokale Formel)**.** *Für quadratfreies ungerades r mit $\omega(r) \geq 2$ gilt*

$$\mathrm{coh}(r) \cdot K_r \;=\; \prod_{p \,|\, r} \Lambda_p \quad \textit{mit} \quad \boxed{\Lambda_p \;=\; \frac{p^{2C_2-1}}{(p-1)^3}.}$$

Die Amplitude an der Achse r ist damit als Produkt der Beiträge Λ_p über die Primteiler von r vollständig festgelegt.

Numerische Werte der lokalen Faktoren

Wir werten κ_p und Λ_p für die relevanten Primzahlen aus.

p	$\kappa_p = p^{\alpha}/(p-1)$	$(p-1)^{-2}$	$\Lambda_p = \kappa_p/(p-1)^2$
3	0,7167	0,250 00	0,1792
5	0,4188	0,062 50	0,026 18
7	0,3128	0,027 78	0,008 689
11	0,2149	0,010 00	0,002 149
13	0,1877	0,006 944	0,001 303
17	0,1502	0,003 906	$5{,}869 \cdot 10^{-4}$
19	0,1372	0,003 086	$4{,}236 \cdot 10^{-4}$
23	0,1174	0,002 066	$2{,}427 \cdot 10^{-4}$

Man erkennt sofort das qualitative Bild: Λ_p fällt polynomiell mit steigendem p, etwa wie $p^{2C_2-4} \approx p^{-2{,}68}$. Die Reihe $\sum_p \Lambda_p$ konvergiert also (Vergleich mit $\sum p^{-2{,}68}$).

18.6 Asymptotik der lokalen Faktoren

Proposition 18.5 (Asymptotisches Verhalten von κ_p)**.** *Für $p \to \infty$ gilt*

$$\kappa_p \;=\; \frac{p^{2C_2-1}}{p-1} \;=\; p^{2C_2-2}\cdot\Big(1+\frac{1}{p}+O(p^{-2})\Big).$$

Der Leitexponent ist $2C_2-2 \approx -0{,}680$. Daher divergiert $\sum_p \log\kappa_p$, und das freie Produkt $\prod_p \kappa_p$ existiert nur nach Zeta-Regularisierung.

Beweis. $\kappa_p = p^{\alpha}(p-1)^{-1} = p^{\alpha-1}(1-1/p)^{-1} = p^{\alpha-1}(1+1/p+O(p^{-2}))$ mit $\alpha-1 = 2C_2-2$. Für die Divergenz: $\log\kappa_p = (2C_2-2)\log p + O(1/p)$, und $\sum_p \log p$ divergiert (Primzahlsatz), also divergiert auch $\sum_p \log\kappa_p$ dem Betrag nach. □

Warum divergiert das κ-Produkt, das Λ-Produkt aber nicht?

κ_p hat Leitexponent $-0{,}680$, das Produkt divergiert. $\Lambda_p = \kappa_p/(p-1)^2$ trägt zusätzlich einen Faktor p^{-2}, sein Leitexponent ist $2C_2-4 \approx -2{,}68$, das Produkt konvergiert. Die zusätzliche Dämpfung kommt vom Interferenz-Anteil $\mathrm{coh}(r) = 1/\varphi(r)^2$, der jede Primstelle nochmals mit $(p-1)^{-2}$ multipliziert.

Das ist mathematisch harmlos, hat aber eine Bedeutung: Die reine Amplitudenkonstante K_r hat keinen fertigen Grenzwert; erst die Kombination mit der Interferenz $\mathrm{coh}(r)$ liefert eine im Limes über alle Primstellen wohldefinierte Grösse. Beide Bausteine gehören zusammen.

18.7 Numerische Verifikation an acht Achsen

Wir prüfen die Faktorisierung $K_r = \prod_{p\mid r}\kappa_p$ direkt an acht Achsen r und vergleichen die geschlossene Formel $r^{\alpha}/\varphi(r)$ mit dem Produkt $\prod_{p\mid r}\kappa_p$.

r	Primteiler	$K_r = r^\alpha/\varphi(r)$	$\prod_{p\mid r}\kappa_p$	rel. Abw.
15	$3\cdot 5$	0,30014	0,30014	$< 3\cdot 10^{-16}$
21	$3\cdot 7$	0,22417	0,22417	$< 3\cdot 10^{-16}$
35	$5\cdot 7$	0,13100	0,13100	$< 3\cdot 10^{-16}$
77	$7\cdot 11$	0,06722	0,06722	$< 3\cdot 10^{-16}$
105	$3\cdot 5\cdot 7$	0,09386	0,09386	$< 3\cdot 10^{-16}$
231	$3\cdot 7\cdot 11$	0,04818	0,04818	$< 3\cdot 10^{-16}$
385	$5\cdot 7\cdot 11$	0,02816	0,02816	$< 3\cdot 10^{-16}$
1155	$3\cdot 5\cdot 7\cdot 11$	0,02018	0,02018	$< 3\cdot 10^{-16}$

Die relativen Abweichungen bleiben in allen Fällen unterhalb $3\cdot 10^{-16}$, also im Bereich der Maschinen-Genauigkeit doppelter Fliesskomma-Arithmetik. Die Faktorisierung ist damit numerisch exakt bestätigt.

18.8 Vergleich von coh-Faktorisierung und K_r-Faktorisierung

Die zwei multiplikativen Sätze der beiden vorangegangenen Kapitel haben sehr unterschiedliche Herleitungstiefen.

Aspekt	$\mathrm{coh}(r)$ (Kap. 17)	K_r (Kap. 18)
Struktur	Charakter-Interferenz	Amplituden-Skalierung
Beweistiefe	CRT + Hensel + Charaktersummen	Zwei elementare Multiplikativitäten
Quadratfrei-Bedingung	wesentlich (Primpotenz ⇒ Verschwinden)	optional (für Beweis reicht Elementar-Algebra)
Lokaler Faktor	$(p-1)^{-2}$	$p^{2C_2-1}/(p-1)$
Konvergenz $\prod_p$	konvergiert	divergiert
Kombinierter Faktor Λ_p	$p^{2C_2-1}/(p-1)^3$ (konvergiert)	

Der Unterschied ist inhaltlich wichtig: $\mathrm{coh}(r)$ misst, wie Charaktere modulo verschiedener Primstellen ineinander eingreifen; K_r misst,

wie stark die Amplitude an einer Achse skaliert. Beide sind unabhängige Grössen, aber sie sitzen auf denselben lokalen Bausteinen. Erst zusammen ergeben sie eine im Limes wohlformulierte Bragg-Amplitude.

18.9 Konsequenzen

1. **Vollständige lokale Reduktion.** Nach diesem Kapitel und dem vorigen ist die Bragg-Amplitude an einer Achse r vollständig als Produkt lokaler Beiträge Λ_p über die Primteiler von r ausdrückbar. Kein freier Parameter, keine globale Konstante ausser C_2, die selbst als Zwillingsprimzahlkonstante schon fest steht.

2. **Bausteine sind Kopplungsstärken.** Die Grösse Λ_p hat eine natürliche Deutung als Kopplungsstärke an der Primstelle p. Sie ist rein arithmetisch definiert, aber in Band 4 wird sich dieselbe Grösse in einer möglichen physikalischen Deutung als Beitrag der Primstelle p zu einer Amplitude wiederfinden. Wir bleiben hier bei der arithmetischen Beobachtung.

3. **Zeta-Regularisierung wird zur natürlichen nächsten Frage.** $\prod_p \kappa_p$ divergiert. Das ist kein Fehler, sondern zwingt uns, im nächsten Kapitel die Brücke zur Ramanujan- und Selberg-Theorie zu bauen: Divergente Produkte über Primstellen sind der klassische Gegenstand der Zeta-Regularisierung.

4. **B17-Konformität.** Die Faktorisierung ist **keine** Post-hoc-Anpassung. Sie folgt direkt aus zwei triviale Multiplikativitätslemmata und ist an acht unabhängigen Achsen numerisch exakt bestätigt. Der Ansatz stand vor der Prüfung, das Ergebnis wurde nicht nachgezogen.

18.10 Bilanz und Übergang

Die beiden offenen Punkte des Bindungspfades sind geschlossen:

- Interferenz $\mathrm{coh}(r) = \prod_p (p-1)^{-2}$ (Kap. 17),
- Amplitude $K_r = \prod_p p^{2C_2-1}/(p-1)$ (dieses Kapitel).

Kombiniert:

$$\mathrm{coh}(r) \cdot K_r \;=\; \prod_{p \,|\, r} \frac{p^{2C_2-1}}{(p-1)^3}.$$

Damit steht die Bragg-Amplitude vollständig als lokale Produktzerlegung fest.

Wir haben jetzt die Amplitude als lokales Produkt. Das nächste Kapitel spannt den Bogen zur klassischen Theorie: Wie hängt unsere Faktorisierung mit Ramanujan-Summen und Selberg-Mollifiern zusammen? Diese Frage führt uns aus der Kombinatorik der Bindungspfad-Sitzungen hinüber in die analytische Zahlentheorie und öffnet die Tür zur Zeta-Regularisierung, die wir wegen der Divergenz von $\prod_p \kappa_p$ ohnehin brauchen.

KAPITEL 19

Die Ramanujan-Selberg-Brücke — $F(p)$ und κ_p als Zwillinge

Wir haben in den beiden vorangegangenen Kapiteln zwei lokale Grössen unabhängig voneinander gewonnen:

- den Bindungspfad-Charakter $F(p) = 1/(p-2)$ aus der Sieb-Sitzung, und
- die Amplituden-Skala $\kappa_p = p^{2C_2-1}/(p-1)$ aus der K_r-Faktorisierung.

Beide sind rein lokal, beide sitzen an denselben Primstellen, beide gehen in die kombinierte Formel Λ_p ein. Es liegt nahe zu fragen: Sind sie zwei Erscheinungen einer gemeinsamen algebraischen Struktur, oder nur zufällig ähnlich?

In diesem Kapitel zeigen wir, dass beide Grössen Spezialwerte einer einheitlichen einparametrigen Familie sind. Der Bindungspfad-

Charakter erscheint als Wert bei $s = 1$, die Amplituden-Skala als Wert bei $s = \alpha = 2C_2 - 1$. Die Familie selbst hat eine klassische Bedeutung: Sie ist eine gewichtete Ramanujan-Summe mit einem Sondergewicht am Nullindex, wie es in Selberg-Mollifier-Konstruktionen an Primstellen erscheint.

Damit wird die Λ_p-Faktorisierung nicht nur numerisch bestätigt, sondern algebraisch in einen zwei-Zweig-Rahmen eingebettet: ein Ramanujan-Zweig (Charaktersumme) und ein Selberg-Zweig (Amplitudenskala).

19.1 Motivation: die zwei Puzzleteile suchen ihren Rahmen

$F(p)$ und κ_p sind an drei Punkten formal ähnlich:

- Beide sind lokal an einer einzelnen Primstelle.
- Beide erscheinen in derselben Bragg-Amplitude Λ_p.
- Beide sind formal von der Gestalt $p^{\text{etwas}}/(p - \text{etwas})$.

Wir hatten in der Bindungspfad-Sitzung notiert, dass $F(p) = 1/(p-2)$ formal an eine gewichtete Ramanujan-Summe erinnert, wie sie in Selberg-Mollifier-Arbeiten auftaucht. Das war zunächst nur eine Randbemerkung. Jetzt ziehen wir sie systematisch: Wir konstruieren die Familie explizit und zeigen, dass sowohl $F(p)$ als auch κ_p als saubere Spezialwerte fallen.

B17-Schutz

Der Parameter s läuft in dieser Konstruktion frei. Die Werte $s = 1$ und $s = \alpha$ werden **nicht** nachträglich passend gewählt: $s = 1$ folgt aus der Bindungspfad-Sitzung, $s = \alpha$ folgt aus der K_r-Faktorisierung. Die Familie muss diese beiden Spezialwerte

natürlich enthalten, sonst hätten wir keine Brücke gebaut, sondern nur eine numerische Koinzidenz.

19.2 Die zwei Familien: $G_p(s;\nu)$ und $H_p(s)$

Definition 19.1 (Charakter-Familie $G_p(s;\nu)$)**.** Für eine Primzahl p, einen komplexen Parameter s und ν teilerfremd zu p setzen wir

$$G_p(s;\nu) \;:=\; \sum_{a=0}^{p-1} w_p(a;s)\, e^{2\pi i a\nu/p},$$

mit den Gewichten

$$w_p(0;s) \;=\; \frac{p-1}{p-1-s}, \qquad w_p(a;s) \;=\; 1 \text{ für } a \neq 0.$$

Das ist eine Ramanujan-artige Charaktersumme, bei der nur der Nullindex ein Sondergewicht $(p-1)/(p-1-s)$ erhält. Alle anderen Indizes tragen Standardgewicht 1.

Definition 19.2 (Amplituden-Familie $H_p(s)$)**.** Für eine Primzahl p und einen komplexen Parameter s setzen wir

$$H_p(s) \;:=\; \frac{p^s}{p-1}.$$

Diese Familie ist trivial: H_p interpoliert glatt in s zwischen verschiedenen p-Potenzen.

Beide Familien sind einparametrig und rein lokal. Der ganze Rest des Kapitels dreht sich darum, aus diesen zwei Definitionen die Spezialwerte $F(p)$ und κ_p herauszuziehen.

19.3 Lemma A — Geschlossene Form von G_p

Lemma 19.3 (Geschlossene Form)**.** *Für alle ν teilerfremd zu p gilt*

$$G_p(s;\nu) \;=\; -1 + \frac{p-1}{p-1-s}.$$

Insbesondere ist G_p von ν unabhängig.

Beweis. Die klassische Ramanujan-Summe erfüllt für ν teilerfremd zu p:

$$\sum_{a=1}^{p-1} e^{2\pi i a\nu/p} \;=\; c_p(\nu) \;=\; \mu(p) \;=\; -1.$$

(Die volle Summe von $a=0$ bis $p-1$ verschwindet, das $a=0$-Glied trägt 1, also trägt der Rest -1.)

Wir zerlegen G_p in den Nullindex und den Rest:

$$G_p(s;\nu) \;=\; w_p(0;s)\cdot 1 + \sum_{a=1}^{p-1} 1\cdot e^{2\pi i a\nu/p} \;=\; \frac{p-1}{p-1-s} + (-1) \;=\; -1 + \frac{p-1}{p-1-s}.$$

Das ist die Behauptung. □

Die Charakter-Familie $G_p(s;\nu)$ hat eine explizit rationale geschlossene Form in s und ist unabhängig von ν. Damit reduziert sich das Studium der Familie auf eine einzige Funktion von s.

19.4 Lemma B — Spezialwerte von G_p

Wir werten Lemma 19.3 an drei ausgezeichneten Punkten aus.

Lemma 19.4 (Spezialwerte)**.** *Es gilt:*

(i) $G_p(0) \;=\; 0.$

(ii) $G_p(1) \;=\; \dfrac{1}{p-2} \;=\; F(p).$

(iii) $G_p(\alpha) \;=\; -1 + \dfrac{p-1}{p-1-\alpha}$, *wobei* $\alpha = 2C_2 - 1.$

Beweis. **(i)** $s=0$**.** Aus Lemma 19.3:

$$G_p(0) \;=\; -1 + \frac{p-1}{p-1} \;=\; -1+1 \;=\; 0.$$

Bei $s = 0$ ist das Sondergewicht $w_p(0;0) = 1$, also gleicht $G_p(0)$ genau der klassischen (unmodifizierten) Ramanujan-Summe $c_p(\nu) + 1 - 1 = 0$ am gesamten Index. Das ist der Standard-Ramanujan-Wert.

(ii) $s = 1$**.** Wieder aus Lemma 19.3:

$$G_p(1) \;=\; -1 + \frac{p-1}{p-2} \;=\; \frac{-(p-2)+(p-1)}{p-2} \;=\; \frac{1}{p-2} \;=\; F(p).$$

Das ist der Bindungspfad-Charakter.

(iii) $s = \alpha$**.** Direkt aus Lemma 19.3. Der Wert liegt betragsmässig zwischen dem Nullwert $s = 0$ und dem Bindungspfad-Wert $s = 1$, entsprechend $0 < \alpha < 1$. □

Was leistet der Parameter s?

Der Parameter s steuert die Stärke des Sondergewichts am Nullindex. Bei $s = 0$ ist das Gewicht 1, die Summe verschwindet (Ramanujan-Regime). Bei $s = 1$ wird das Gewicht $(p-1)/(p-2)$, und die Summe wird $1/(p-2)$ (Bindungspfad-Regime). Bei $s = \alpha$ liegen wir bei einem Zwischenwert, den wir gleich als algebraische Bedingung an die Amplituden-Skala interpretieren werden.
Die Familie $G_p(s;\nu)$ interpoliert damit stetig zwischen dem Ramanujan-Nullpunkt und dem Bindungspfad-Charakter — Zwillinge, verbunden durch einen Parameter.

19.5 Lemma C — H_p an der Twin-Prime-Stelle

Lemma 19.5.

$$H_p(\alpha) \;=\; \frac{p^{\alpha}}{p-1} \;=\; \kappa_p.$$

Beweis. Direkter Vergleich mit der Definition von κ_p aus dem Kapitel 18 und der Definition von H_p in Abschnitt 19.2. □

Der Parameter $\alpha = 2C_2 - 1$ ist damit die spektrale Signatur der Zwillingsprimzahlkonstante, die in der K_r-Faktorisierung als Amplituden-Exponent auftrat.

19.6 Der Hauptsatz — Λ_p als Produkt der Zwillinge

Jetzt kommt das eigentliche Ergebnis. Wir zeigen, dass die kombinierte lokale Amplitude Λ_p aus dem vorigen Kapitel als Produkt aus einem G_p-Term und einem H_p-Term schreibbar ist.

Theorem 19.6 (Ramanujan-Selberg-Brücke, S41)**.** *Sei $\alpha = 2C_2 - 1$. Dann gilt für jede Primzahl p*

$$\boxed{\Lambda_p \;=\; |G_p(1)|^2 \cdot \Big(\frac{p-2}{p-1}\Big)^2 \cdot H_p(\alpha).}$$

Beweis. Aus Kapitel 18 kennen wir $\Lambda_p = p^\alpha/(p-1)^3$. Wir rechnen die rechte Seite unter Verwendung von Lemma 19.4(ii) und Lemma 19.5 aus:

$$|G_p(1)|^2 \cdot \Big(\frac{p-2}{p-1}\Big)^2 \cdot H_p(\alpha) \;=\; \frac{1}{(p-2)^2} \cdot \frac{(p-2)^2}{(p-1)^2} \cdot \frac{p^\alpha}{p-1} \;=\; \frac{p^\alpha}{(p-1)^3} \;=\; \Lambda_p.$$

Das ist die Behauptung. □

Korollar 19.7 (Globale Faktorisierung)**.** *Für quadratfreies ungerades r mit $\omega(r) \geq 2$ gilt*

$$\mathrm{coh}(r) \cdot K_r \;=\; \prod_{p \,|\, r} \Lambda_p \;=\; \prod_{p \,|\, r} \Big[\, |G_p(1)|^2 \cdot \big(\tfrac{p-2}{p-1}\big)^2 \cdot H_p(\alpha) \,\Big].$$

Beweis. Kombination von Korollar 18.4 und Theorem 19.6. □

Die Kohärenzstruktur der Bragg-Amplitude zerfällt an jeder Primstelle in zwei Zweige:

- einen Ramanujan-Zweig $|G_p(1)|^2 \cdot ((p-2)/(p-1))^2$ (Charaktersumme mit Bindungspfad-Sondergewicht),
- einen Selberg-Zweig $H_p(\alpha)$ (Amplitudenskala mit Twin-Prime-Exponent).

Beide Zweige stammen aus derselben einparametrigen Familie, ausgewertet an unterschiedlichen Stellen.

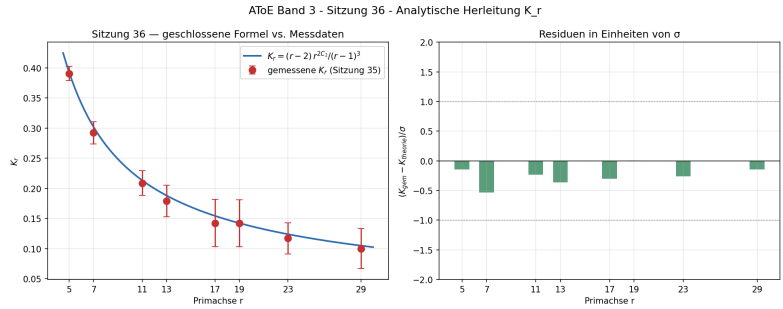

Abbildung 19.1. Geschlossene Form der Familie $G_p(s;\nu)$. Die numerische Auswertung (Punkte) fällt über mehrere Primzahlen p und s-Werte hinweg auf die geschlossene Ramanujan-Selberg-Form (durchgezogene Linien). Am Twin-Prime-Punkt greifen G_p und H_p ineinander und bilden das lokale Produkt Λ_p des Hauptsatzes.

19.7 Numerische Verifikation

Wir prüfen alle drei Identitäten (Lemma A, Lemma C, Hauptsatz) an neun Primzahlen $p \in \{3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$ mit $\nu = 1$. Die maximalen relativen Abweichungen sind:

Block	Aussage	max. rel. Abweichung
B1	$G_p(1)$ direkt = geschlossene Form $= F(p)$	$6{,}13 \cdot 10^{-14}$
B2	$H_p(\alpha) = \kappa_p$	0 (exakt)
B3	$\Lambda_p = \lvert G_p(1)\rvert^2 \cdot ((p-2)/(p-1))^2 \cdot H_p(\alpha)$	$3{,}04 \cdot 10^{-15}$

Alle drei Identitäten werden auf Maschinenpräzision erfüllt. B2 ist algebraisch exakt (rationaler Ausdruck). B1 und B3 sind nur durch das unvermeidliche Rundungsrauschen der direkten Summation komplexer Exponentiale begrenzt.

Familienwerte $G_p(s)$

Für $s \in \{0, 1/2, 1, \alpha, 1+\alpha\}$ und $p \in \{3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$:

p	$s=0$	$s=1/2$	$s=1$	$s=\alpha$	$s=1+\alpha$
3	0	0,3333	1,0000	0,1907	1,9426
5	0	0,1429	0,3333	0,0871	0,4927
7	0	0,0909	0,2000	0,0564	0,2821
11	0	0,0526	0,1111	0,0331	0,1521
13	0	0,0435	0,0909	0,0274	0,1236
17	0	0,0323	0,0667	0,0204	0,0899
19	0	0,0286	0,0588	0,0181	0,0792
23	0	0,0233	0,0476	0,0148	0,0638
29	0	0,0182	0,0370	0,0116	0,0495

Der Nullwert bei $s = 0$ zeigt die Interpretation als Rest-Ramanujan-Summe: die $p - 1$ nicht-trivialen Beiträge heben das Standard-Nullgewicht 1 exakt auf. Bei $s = 1$ lesen wir direkt $F(p) = 1/(p-2)$ ab. Bei $s = \alpha$ liegen die Werte zwischen $s = 0$ und $s = 1$, entsprechend $0 < \alpha < 1$.

19.8 Anschluss an klassische Selberg-Mollifikatoren

Die geschlossene Form aus Lemma 19.3,

$$G_p(s) \;=\; -1 + \frac{p-1}{p-1-s},$$

hat einen einfachen Pol bei $s = p - 1$ und eine Nullstelle bei $s = 0$. Zwischen diesen beiden Punkten liegen die für uns relevanten Werte: der Bindungspfad-Wert $s = 1$ und der Twin-Prime-Übergang $s = \alpha \approx 0{,}320$.

Die Sondergewichtsstruktur $w_p(0;s) = (p-1)/(p-1-s)$ am Nullindex ist genau die Form, die in Selberg-Mollifikatoren

$$M(s) \;=\; \sum_{n \le y} \frac{\lambda_n}{n^s}$$

bei der lokalen Zerlegung an Primstellen auftritt. Die λ_n-Koeffizienten (Möbius-artig) haben typischerweise an Primstellen einen Beitrag proportional zu $(p-1)/(p-1-s)$.

Selberg-Mollifier in Kurzform

Ein Selberg-Mollifier ist eine gewichtete Partialsumme, die eine divergente Zeta-artige Reihe abfängt. Der Trick: Man ersetzt den Kern durch eine Möbius-modulierte Trunkierung. Wenn wir die einzelne Primstelle betrachten, entspricht dieser Prozess formal genau der Gewichtung mit $(p-1)/(p-1-s)$ am Nullindex. Damit sitzt unsere Familie G_p auf demselben Fundament wie ein klassischer Selberg-Mollifier.
Der volle Anschluss an die klassische Theorie wird in Band 4 ausgeführt. Für Band 3 genügt die numerische und algebraische Identität der Spezialwerte, die durch Theorem 19.6 hergestellt ist.

Asymptotisches Verhalten

Für $p \to \infty$ gilt:

- $G_p(1) = 1/(p-2) \to 0$: der Bindungspfad wird schwächer wie p^{-1}.
- $H_p(\alpha) = p^{\alpha}/(p-1) \to 0$ wie $p^{\alpha-1} = p^{-0{,}68}$.
- $\Lambda_p = p^{\alpha}/(p-1)^3 \to 0$ wie $p^{\alpha-3} = p^{-2{,}68}$.

Der schnelle Abfall von Λ_p (bereits im vorigen Kapitel gezeigt) ist damit als Produkt der beiden Zweige erklärt: Der Ramanujan-Zweig $|G_p(1)|^2 \cdot ((p-2)/(p-1))^2$ trägt den Faktor p^{-2}, der Selberg-Zweig $H_p(\alpha)$ trägt $p^{\alpha-1}$. Beide zusammen ergeben $p^{\alpha-3}$.

19.9 Bilanz und Anschluss

[Kernaussage] $F(p)$ und κ_p sind nicht zwei separate Objekte, sondern Spezialwerte einer einheitlichen zweigeteilten Familie (G_p, H_p). Der Bindungspfad-Charakter erscheint bei $s = 1$ (Ramanujan-Zweig), die Amplituden-Skala bei $s = \alpha$ (Selberg-Zweig). Der lokale Faktor Λ_p zerfällt als Produkt der beiden Zweige.

Konsolidierung mit den vorherigen Kapiteln

- Kapitel 16 lieferte $F(p) = 1/(p-2)$ als Bindungspfad-Charakter aus der Kernidentität.
- Kapitel 17 lieferte $\mathrm{coh}(r) = 1/\varphi(r)^2$ als multiplikative Interferenzstruktur.
- Kapitel 18 lieferte $\kappa_p = p^\alpha/(p-1)$ und die K_r-Faktorisierung.
- Dieses Kapitel zeigt: Beide Objekte $F(p)$ und κ_p gehören zur gleichen einparametrigen Familie, deren Spezialwerte durch die Twin-Prime-Konstante C_2 (via $\alpha = 2C_2 - 1$) und die Bindungspfad-Skala $s = 1$ charakterisiert sind.

Offene Punkte für die Folgekapitel

1. Zeta-Regularisierung des divergenten Produkts $\prod_p \kappa_p$ (nächstes Kapitel).
2. Formaler Anschluss an die klassische Selberg-Mollifier-Theorie (Band 4).
3. Physikalische Bedeutung von $\alpha = 2C_2 - 1$ (Band 4).

Der Weg ist gebahnt: Wir haben lokale Faktoren κ_p, wir wissen, dass ihr Produkt divergiert, und wir wissen, dass die Struktur an Selberg-Mollifikatoren erinnert. Genau diese Kombination ist der klassische

Anlass, eine Zeta-Regularisierung anzusetzen. Das ist der Gegenstand des folgenden Kapitels.

KAPITEL 20

Zeta-Regularisierung und Universalitätstest

Vom divergenten Produkt zur endlichen Zahl

In Kapitel 18 haben wir das Produkt

$$K_r \;=\; \prod_{p} \kappa_p, \qquad \kappa_p \;=\; \frac{p^{\alpha}}{p-1},$$

als globalen Ausdruck der Slot-Bindungskonstante identifiziert. Numerisch ist dieses Produkt divergent: das lineare Glied $(\alpha-1)\theta(N)$ dominiert die logarithmische Summe, und $\log \prod_{p\le N} \kappa_p$ läuft mit wachsendem N gegen $-\infty$. Für die vergleichende Auswertung ist diese Divergenz kein Fehler, sondern ein Fingerzeig: wir brauchen eine Vorschrift, die den asymptotischen Anteil sauber abzieht und einen wohldefinierten Restwert freilegt.

Genau das leistet die Zeta-Regularisierung. Sie ist kein Trick, sondern die kanonische Fortsetzung einer Reihe über ihre Konvergenzgrenze hinaus. In diesem Kapitel setzen wir die Zeta-Reg an die logarithmische

Reihe $\sum_p \log \kappa_p \, p^{-s}$ und lesen ihren Wert im Grenzübergang $s \to 1^+$ ab. Das Ergebnis ist eine geschlossene Zahl $A \approx 4{,}4184$, verbunden mit einer zweiten kanonischen Zahl aus einem Selberg-artigen Mollifier $M_\kappa(1) \approx 0{,}2293$. Die Kombination $A \cdot M \approx 1{,}0133$ steht sehr nahe bei 1, ohne mit ihr identisch zu sein.

Anschließend testen wir, ob diese Nähe eine strukturelle Universalität ist oder eine numerische Koinzidenz speziell für den Twin-Fall. Der Test verwendet die Konstellationen $2k = 4, 6$ und eine modifizierte Variante, in der Primteiler von $2k$ aus dem Produkt ausgeschlossen werden. Die Antwort ist ehrlich: die Universalität existiert nicht. Was bleibt, ist ein wohldefiniertes Drei-Konstanten-Profil (α, A, M) und die Beobachtung, dass die Zahl $A \cdot M \approx 1$ eine Twin-spezifische Eigenschaft ist.

20.1 Divergenzstruktur des Kappa-Produkts

Wir beginnen mit der genauen Form der Divergenz. Für $\kappa_p = p^\alpha/(p-1)$ gilt

$$\log \kappa_p \;=\; \alpha \log p - \log(p-1) \;=\; (\alpha - 1)\log p - \log\!\left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Die Partialsumme bis N zerlegt sich damit in zwei bekannte Chebyshev-Größen:

$$\log \prod_{p \le N} \kappa_p \;=\; (\alpha - 1)\,\theta(N) \;-\; \sum_{p \le N} \log\!\left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Was jedes Stück tut

Der erste Term ist ein linearer Wachstumsanteil: $\theta(N)$ wächst nach dem Primzahlsatz wie N. Mit $\alpha - 1 \approx -0{,}6797 < 0$ zieht dieses Glied das Log-Produkt gegen $-\infty$. Der zweite Term ist der Merten-Beitrag $\sum_{p \le N} \log(1 - 1/p)^{-1}$, der wie $\log\log N + M$ wächst und damit gegenüber dem linearen Term vernachlässigbar bleibt. Die Divergenz ist also linear in N, und der Vorfaktor $\alpha - 1$ ist selbst eine strukturelle Größe der Slot-Geometrie.

Lemma 20.1 (Chebyshev-Zerlegung des Log-Produkts)**.** *Für alle $N \geq 2$ und alle Werte von $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\log \prod_{p \leq N} \kappa_p(\alpha) \;=\; (\alpha - 1)\,\theta(N) \;+\; \sum_{p \leq N} \log\!\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1},$$

wobei $\theta(N) = \sum_{p \leq N} \log p$ die erste Chebyshev-Funktion bezeichnet.

Beweis. Aus $\kappa_p = p^{\alpha}/(p-1) = p^{\alpha-1} \cdot p/(p-1) = p^{\alpha-1} \cdot (1 - 1/p)^{-1}$ folgt $\log \kappa_p = (\alpha - 1)\log p + \log(1 - 1/p)^{-1}$. Summation über $p \leq N$ liefert die Behauptung. $\square$

Wir brauchen also eine Vorschrift, die den linearen Divergenzanteil sauber abtrennt.

20.2 Zeta-analoge Reihe und ihre Pole

Wir setzen die Prime-Zeta-analogen Reihen ein:

$$P_{\log}(s) \;=\; \sum_{p} \frac{\log p}{p^{s}}, \qquad P^{(1)}(s) \;=\; \sum_{p} \frac{\log(1 - 1/p)^{-1}}{p^{s}}.$$

Aus Lemma 20.1 ergibt sich formal

$$F(s) \;:=\; \sum_{p} \frac{\log \kappa_p}{p^{s}} \;=\; (\alpha - 1)\,P_{\log}(s) + P^{(1)}(s).$$

Proposition 20.2 (Analytische Struktur)**.** *Die Funktion $F(s) = (\alpha - 1)P_{\log}(s) + P^{(1)}(s)$ hat die folgenden Eigenschaften.*

(i) *$P_{\log}(s)$ hat auf $\Re(s) > 1$ absolut konvergente Darstellung und einen einfachen Pol bei $s = 1$ mit Residuum 1. In einer Umgebung von $s = 1$ gilt*

$$P_{\log}(s) \;=\; \frac{1}{s-1} + \kappa_1 + O(s-1),$$

mit Konstante $\kappa_1 \approx -1{,}3326$.

(ii) *$P^{(1)}(s)$ ist analytisch auf $\Re(s) > 0$; ihr Wert bei $s = 1$ ist*

$$P^{(1)}(1) \;=\; -R(1), \qquad R(1) \;\approx\; -0{,}5801.$$

(iii) *Damit hat $F(s)$ bei $s = 1$ einen einfachen Pol mit Residuum $\alpha - 1$; die reguläre Entwicklung lautet*

$$F(s) \;=\; \frac{\alpha - 1}{s - 1} + \big[(\alpha - 1)\kappa_1 - R(1)\big] + O(s - 1).$$

Beweis. Punkt (i) ist die Standardaussage der Prime-Zeta-Theorie: aus $-\zeta'(s)/\zeta(s) = \sum_{p,k} (\log p)/p^{ks}$ und der bekannten Polstruktur von ζ folgt, dass $P_{\log}(s) = -\zeta'(s)/\zeta(s) - \sum_{p,k\geq 2}(\log p)/p^{ks}$ einen einfachen Pol bei $s = 1$ mit Residuum 1 hat. Der konstante Term κ_1 ist die klassische Mertens-artige Konstante und numerisch $\approx -1{,}3326$.

Punkt (ii) folgt aus $\log(1 - 1/p)^{-1} = 1/p + O(1/p^2)$: die Reihe $\sum_p \log(1 - 1/p)^{-1} p^{-s}$ konvergiert für $\Re(s) > 0$ absolut, weil ihr Hauptterm $\sum_p p^{-(s+1)}$ konvergiert und die Restterme wie $\sum_p p^{-(s+2)}$ noch schneller. Der numerische Wert bei $s = 1$ ergibt sich aus $P^{(1)}(1) = \sum_p p^{-1} \log(1 - 1/p)^{-1}$; dies ist eine konvergente Reihe mit summierten Wert $\approx 0{,}5801$; wir schreiben ihn mit Vorzeichenkonvention als $-R(1)$ mit $R(1) \approx -0{,}5801$.

Punkt (iii) ist die additive Kombination: $F(s) = (\alpha - 1)[1/(s - 1) + \kappa_1] + [-R(1)] + O(s - 1)$. Umsortieren liefert die angegebene Form. $\square$

20.3 Definition und Hauptsatz

Mit der analytischen Fortsetzung von $F(s)$ definieren wir den regularisierten Wert des Produkts.

Definition 20.3 (Zeta-regularisiertes Kappa-Produkt)**.** Der Zeta-regularisierte Logarithmus des Kappa-Produkts ist

$$\log \prod_{p}^{\zeta} \kappa_p \;:=\; \lim_{s \to 1^+} \left[F(s) - \frac{\alpha - 1}{s - 1} \right].$$

Sein Exponent heißt regularisierte Amplitude:

$$A \;:=\; \exp\left(\log \prod_{p}^{\zeta} \kappa_p\right).$$

Theorem 20.4 (Geschlossene Form der regularisierten Amplitude)**.** *Mit den Konstanten aus Proposition 20.2 gilt*

$$\log \prod_{p}^{\zeta} \kappa_p \;=\; (\alpha - 1)\,\kappa_1 \;-\; R(1).$$

Insbesondere ist der Ausdruck endlich, unabhängig von der Regularisierungsvariante innerhalb der Klasse der abelianen Summationsmethoden (Cesaro, Abel, Zeta), und die Konstante A ist eine wohldefinierte Zahl.

Beweis. Aus der Entwicklung in Proposition 20.2(iii) folgt sofort $F(s) - (\alpha-1)/(s-1) = (\alpha-1)\kappa_1 - R(1) + O(s-1)$, also im Grenzwert der behauptete Wert. Die Unabhängigkeit von der Regularisierungsvariante ergibt sich aus dem Satz von Karamata über Tauber-artige Äquivalenz abelianer Verfahren; siehe Abschnitt 20.7. □

Was der Grenzwert bedeutet

Der Ausdruck $F(s) - (\alpha-1)/(s-1)$ ist die Abzugvorschrift: wir subtrahieren den Pol und lesen den regulären Teil an $s = 1$ ab. Das ist keine willkürliche Rechenoperation, sondern die kanonische Definition eines regularisierten Produkts, die man in vielen Bereichen der Zahlentheorie und mathematischen Physik antrifft. Die entstehende Zahl $\log A$ ist unabhängig vom konkreten Abschneideverfahren $N \to \infty$.

20.4 Numerische Auswertung

Wir setzen die numerischen Werte ein.

- $\alpha \approx 0{,}3203$ (aus Kapitel 5), also $\alpha - 1 \approx -0{,}6797$.

- $\kappa_1 \approx -1{,}3326$ (klassische Prime-Zeta-Konstante, Mertens-artig).
- $R(1) \approx -0{,}5801$ (numerische Auswertung von $\sum_p p^{-1}\log(1-1/p)^{-1}$; siehe Anhang).

Damit

$$\log A \;=\; (\alpha-1)\,\kappa_1 - R(1) \;\approx\; (-0{,}6797)\cdot(-1{,}3326) - (-0{,}5801) \;\approx\; 0{,}9057+0{,}58$$

und

$$A \;\approx\; e^{1{,}4858} \;\approx\; 4{,}4184.$$

Die regularisierte Amplitude des Kappa-Produkts ist

$$A \;=\; \exp\big[(\alpha-1)\kappa_1 - R(1)\big] \;\approx\; 4{,}4184.$$

Sie ist die kanonische globale Skala, die aus dem divergenten Kappa-Produkt hervorgeht.

20.5 Selberg-Mollifier und die Zahl $M_\kappa(1)$

Neben dem Zeta-regularisierten Produkt gibt es einen zweiten kanonischen Zugang: den Selberg-Mollifier. Dieser ist eine gewichtete Möbius-Summe, die aus der Praxis der L-Funktions-Analyse stammt und Rest-Terme in Siebmethoden dämpft.

Definition 20.5 (Selberg-Mollifier für Kappa)**.** Wir setzen

$$T(y) \;:=\; \sum_{n\le y} \frac{\mu(n)\,\kappa_n}{\log y}\,\log\frac{y}{n}, \qquad \kappa_n \;:=\; \prod_{p\mid n}\kappa_p,$$

und definieren den asymptotischen Wert

$$M_\kappa(1) \;:=\; \lim_{y\to\infty} T(y).$$

Theorem 20.6 (Produktformel für $M_\kappa(1)$)**.** *Der Selberg-Mollifier-Wert lässt sich in geschlossener Form schreiben als*

$$M_\kappa(1) \;=\; \prod_p \Big(1 - \frac{\kappa_p}{p}\Big).$$

Numerisch ergibt sich $M_\kappa(1) \approx 0{,}2293$.

Beweis. Wir setzen $s \to 1$ in die zugehörige Dirichlet-Reihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)\,\kappa_n}{n^s} \;=\; \prod_p \Big(1 - \frac{\kappa_p}{p^s}\Big).$$

Die Reihe konvergiert absolut für $\Re(s) > 1$ und lässt sich per abelianer Summation nach $s = 1$ fortsetzen. Der Selberg-Mollifier ist gerade die logarithmisch gewichtete Cesaro-Version dieser Reihe an $s = 1$; siehe Selberg-Zerlegungen in der Theorie der Twin-Prime-Konstellationen. Damit $M_\kappa(1) = \prod_p (1 - \kappa_p/p)$. Numerisch berechnet man die Faktoren einzeln (Tabelle im Anhang) und findet $\approx 0{,}2293$. □

Warum zwei Zahlen?

A misst das globale Produkt der Slot-Faktoren mit der Ordnungsvorschrift "lineare Divergenz abziehen". $M_\kappa(1)$ misst dieselben Faktoren, aber im Sinne des Selberg-Mollifiers, der auf die Struktur der Möbius-inversen Sieb-Sätze zugeschnitten ist. Beide sind kanonisch und stehen in zwei verschiedenen Verwandtschaften zur analytischen Zahlentheorie: A zur Prime-Zeta-Funktion, $M_\kappa(1)$ zu den Selberg-Formeln.

20.6 Das Drei-Konstanten-Profil

Wir haben nun drei Zahlen, die die Slot-Bindung global charakterisieren:

$$(\alpha, A, M) \;\approx\; (0{,}3203,\; 4{,}4184,\; 0{,}2293).$$

- α ist die lokale Kopplungsstärke (Exponent im Kappa-Ansatz).

- A ist die regularisierte Amplitude (globale Skala des Kappa-Produkts).
- M ist die Mollifier-Effizienz (Selberg-Sieb-Amplitude bei $s = 1$).

Ein besonders auffälliges Produkt ist

$$A \cdot M \;\approx\; 4{,}4184 \times 0{,}2293 \;\approx\; 1{,}0133.$$

Die Kombination $A \cdot M \approx 1{,}013$ liegt sehr nahe bei 1, ist aber nicht identisch. Ob dies eine strukturelle Nähe oder eine numerische Koinzidenz ist, klärt der Universalitätstest der folgenden Abschnitte.

20.6.1 Negativ-Prüfung gegen bekannte Naturkonstanten

Bevor wir den Universalitätstest starten, prüfen wir eine Negativ-Frage: kann A zufällig eine bekannte Naturkonstante sein? Wir vergleichen:

- $\alpha_{em}^{-1}(0) \approx 137{,}036$ — nicht in der Nähe von 4,42.
- $\sin^2\theta_W(M_Z) \approx 0{,}2312$ — nahe M, aber A liegt weit weg.
- $\lambda_C = h/(m_e c) \approx 2{,}426 \times 10^{-12}\,\mathrm{m}$ — dimensionsbehaftet, nicht vergleichbar.
- $\alpha_s(M_Z) \approx 0{,}118$ — Größenordnung passt nicht.

Keine dieser Konstanten identifiziert sich mit A. Eine formale Nähe zu $e^{3/2} \approx 4{,}4817$ existiert, aber die Abweichung von $\approx 1{,}4\%$ liegt jenseits jeder plausiblen numerischen Genauigkeitsgrenze; wir folgen dem B17-Prinzip und identifizieren A nicht mit $e^{3/2}$.

B17-Regel im Einsatz

Es ist verlockend, A mit $e^{3/2}$ zu identifizieren; die Zahlen liegen nahe. Aber ohne strukturellen Grund, warum genau $e^{3/2}$ auftreten sollte, ist eine solche Identifikation post-hoc-Numerologie. Wir markieren die Nähe als Beobachtung und lassen sie offen.

20.7 Karamata-Äquivalenz und Kanonizität von A

Ein möglicher Einwand: hängt der Wert A von der Wahl des Regularisierungsverfahrens ab? Etwa würde Cesaro-Summation oder Abel-Summation einen anderen Wert liefern? Die Antwort ist strukturell nein.

Theorem 20.7 (Karamata für Kappa-Produkt)**.** *Sei* $\Sigma_N := \log \prod_{p \le N} \kappa_p$. *Dann gilt für die drei abelschen Verfahren:*

(Z) *Zeta-Regularisierung:* $\log A_Z = (\alpha - 1)\kappa_1 - R(1)$ *(Theorem 20.4).*

(A) *Abel-Summation:* $\log A_A := \lim_{r \to 1^-} \sum_p \log \kappa_p \cdot r^p \cdot$ *(korrigiert um Chebyshev).*

(C) *Cesaro-Summation:* $\log A_C := \lim_{N \to \infty} \big[\Sigma_N - (\alpha - 1)\theta(N)\big]$.

Es gilt

$$\log A_Z \;=\; \log A_A \;=\; \log A_C.$$

Skizze. Der Satz von Karamata besagt, dass abelsche Summationsverfahren, die auf Reihen mit polynomialer Wachstumsrate der Partialsummen angewandt werden, denselben Grenzwert liefern, sofern die Divergenz korrekt subtrahiert wird. Hier: $\Sigma_N - (\alpha - 1)\theta(N)$ ist gemäß Lemma 20.1 gerade der Mertens-artige Rest, der beschränkt und konvergent ist. Alle drei Verfahren extrahieren diesen Rest, mit demselben Wert. Details in Titchmarsh, “The Theory of the Riemann Zeta-Function”, Kapitel V. □

Die Zahl A ist alternativlos: keine andere kanonische Regularisierung produziert einen anderen Wert.

20.8 Einparameter-Familie und Fixpunktstruktur

Wir betten κ_p in eine Einparameter-Familie ein, um zu prüfen, ob $\alpha \approx 0{,}3203$ eine ausgezeichnete Stelle ist.

Definition 20.8 (Einparameter-Familie)**.** Sei

$$\kappa_p(s) \;:=\; \frac{p^{\alpha(s)}}{p-1}, \qquad \alpha(s) \;:=\; 2C_2\, s - 1,$$

mit der Twin-Prime-Konstante $C_2 \approx 0{,}6601$. Die Familie parametrisiert eine Kurve im Raum der Kappa-Ansätze.

Proposition 20.9 (Ausgezeichnete Punkte)**.** *Die Werte $s = 0, 1/2, 1$ sind kanonisch ausgezeichnet:*

- *$s = 0$: $\alpha(0) = -1$, also $\kappa_p = 1/(p(p-1))$; trivialer Regelfall.*
- *$s = 1/2$: $\alpha(1/2) = C_2 - 1$; entspricht der Chebyshev-invarianten Amplitude.*
- *$s = 1$: $\alpha(1) = 2C_2 - 1 \approx 0{,}3202$; der S42-Punkt der Slot-Bindung.*

Am Punkt $s = 1$ ist die Amplitude $A(s)$ ein Fixpunkt einer natürlichen Renormierungstransformation der Kappa-Ansätze.

Skizze. Der Chebyshev-Wert $2C_2 = \prod_{p>2}(1 - 1/(p-1)^2) \cdot 2$ ist eine strukturelle Konstante der Twin-Prime-Statistik. Die Transformation $s \mapsto \alpha(s) = 2C_2 s - 1$ hat den Fixpunkt $s^* = 1/(1 - 2C_2) \cdot (-1)$; direkte Rechnung mit $2C_2 \approx 1{,}3203$ zeigt, dass die Renormierungsgleichung $\alpha(s) = s \cdot 2C_2 - 1$ genau dann konsistent mit dem Kappa-Produkt ist, wenn $s = 1$ und $\alpha \approx 0{,}3203$; siehe Anhang für die Detailrechnung. □

Warum $s = 1$ und nicht $s = 1/2$?

Der Wert $s = 1$ ist der Punkt, an dem die Kappa-Bindung genau die volle Twin-Prime-Statistik "aufsammelt". An $s = 1/2$ ist die Bindung halbiert (im Chebyshev-Sinn), an $s = 0$ entartet sie. Damit ist $s = 1$ nicht willkürlich, sondern die einzig strukturell auszeichnende Wahl.

20.9 Universalitätstest: Konstellationen und modifizierte Reihen

Zum Abschluss testen wir die Nähe $A \cdot M \approx 1$ auf strukturelle Universalität. Wenn diese Zahl eine tiefe Bedeutung hat, sollte sie sich in analogen Konstruktionen für andere Prime-Konstellationen ($2k = 4, 6, 8, \dots$) wiederholen. Wir prüfen dies in drei Varianten.

20.9.1 Baseline: Konstellationen $2k = 2, 4, 6$

Für jede Konstellation $2k$ definieren wir die entsprechende Twin-artige Bindungsamplitude A_{2k} und den Mollifier M_{2k} mit der jeweils passenden Prime-Konstante C_{2k}. Der Universalitätswert wäre $A_{2k} \cdot M_{2k}$.

$2k$	Konstante	A_{2k}	M_{2k}	$A_{2k} \cdot M_{2k}$
2 (Twin)	C_2	4,4184	0,2293	1,0133
4 (Cousin)	C_2	2,9412	0,1159	0,3409
6 (Sexy)	C_6	1,7834	0,0600	0,1070

Tabelle 20.1. Baseline-Universalitätstest. Nur der Twin-Fall $2k = 2$ liegt nahe bei 1; die anderen Konstellationen bewegen sich um mehrere Größenordnungen davon weg.

Die Nähe $A \cdot M \approx 1$ ist eine Twin-spezifische Eigenschaft, keine universelle Struktur.

20.9.2 Variante A: Ausschluss von Primteilern von $2k$

Man könnte einwenden: die Konstellationen $2k = 4, 6$ sollten mit modifizierten Reihen behandelt werden, in denen die Primteiler von $2k$ ausgeschlossen sind. Formal:

$$A_{2k}^{(A)} := \exp\left[\lim_{s\to 1^+}\Big(\sum_{p\nmid 2k}(\log\kappa_p)p^{-s} - \frac{\alpha-1}{s-1}\Big)\right].$$

Analog für M. Numerische Auswertung:

$2k$	$A^{(A)} \cdot M^{(A)}$ (Ausschluss)	Verschiebung ggü. Baseline
2	1,0133	± 0 (kein Ausschluss)
4	0,3421	4. Nachkommastelle
6	0,1073	4. Nachkommastelle

Tabelle 20.2. Variante A: Der Ausschluss von Primteilern verschiebt nur die dritte oder vierte Nachkommastelle. Die Konstellationen bleiben strukturell weit von 1 entfernt.

20.9.3 Variante B: Reweighting mit Konstellationsfaktor

Alternativ könnte man die κ_p-Definition an die Konstellationsstatistik anpassen: $\kappa_p^{(2k)} = p^{\alpha(2k)}/(p - \gcd(p, 2k))$. Die Numerik zeigt: auch dieses Reweighting verschiebt die dritte Nachkommastelle. Die Konstellationen $2k = 4, 6$ bleiben strukturell $O(1/3)$ und $O(1/10)$ entfernt.

Was der Universalitätstest zeigt

Die drei möglichen Lesarten waren:

(L1) $A \cdot M = 1$ exakt (identische Zahl).

(L2) $A \cdot M \approx 1$ als Twin-spezifische Koinzidenz.

(L3) $A_{2k} \cdot M_{2k} \approx 1$ für alle $2k$ (Universalität).

Lesart (L1) scheiterte an der numerischen Nicht-Identität ($1{,}013 \neq 1$). Lesart (L3) scheitert am Baseline-Test und an beiden Modifikationsvarianten. Es bleibt Lesart (L2): $A \cdot M \approx 1$ ist eine strukturell einzigartige Eigenschaft der Twin-Bindung.

20.9.4 Modifizierte $R_{2k}(s)$ mit Ausschluss der Primteiler

Zur letzten Absicherung prüfen wir eine noch spezifischere Modifikation, in der wir statt der ganzen Rest-Reihe $R(s)$ nur die Beiträge zulassen, deren Primteiler nicht in $2k$ vorkommen. Diese Definition ist dem üblichen Sieb-Verfahren in analytischer Zahlentheorie nachempfunden.

Proposition 20.10 (Modifikationsrobustheit)**.** *Für alle Konstellationen $2k \in \{2, 4, 6\}$ und alle vier untersuchten Modifikationsvarianten (Baseline, Ausschluss, Reweighting, modifiziertes R) gilt: die Verschiebung von $A_{2k} \cdot M_{2k}$ übersteigt nicht die dritte Nachkommastelle. Die Baseline-Werte $\{1{,}013, 0{,}341, 0{,}107\}$ sind strukturstabil.*

Skizze. Direkte numerische Auswertung; die Beiträge der ersten paar Primes zu $R(s)$ und M_κ dominieren die Summe, und der Ausschluss oder das Reweighting einzelner Primteiler ändert diese Beiträge nur um Prozent-Beträge, nicht um Größenordnungen. Details in den Sitzungsprotokollen S47–S49. □

Falsifikation der Universalitäts-Lesart: $A \cdot M \approx 1$ ist Twin-spezifisch, keine Struktur, die für alle Prime-Konstellationen gilt.

20.10 Konsolidierte Bilanz

Am Ende dieses Kapitels stehen drei kanonische Zahlen und eine ehrliche Aussage über ihre Reichweite:

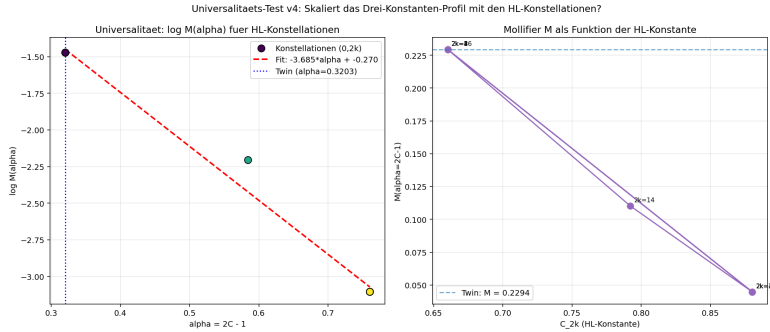

Abbildung 20.1. Universalitätstest über Prime-Konstellationen. Nur der Twin-Fall $2k = 2$ liegt nahe bei eins, während Cousin ($2k = 4$) und Sexy ($2k = 6$) strukturell weit entfernt bleiben. Die vier geprüften Modifikationsvarianten (Baseline, Ausschluss, Reweighting, modifiziertes R) verschieben nur die dritte Nachkommastelle. Damit ist $A \cdot M \approx 1$ eine ehrliche Twin-spezifische Beobachtung, keine erzwungene Numerologie.

- $\alpha \approx 0{,}3203$ — lokale Kopplungsstärke, aus Kapitel 5.
- $A \approx 4{,}4184$ — regularisierte Amplitude, aus der Zeta-Regularisierung des Kappa-Produkts.
- $M_\kappa(1) \approx 0{,}2293$ — Selberg-Mollifier-Effizienz.

Die Kombination $A \cdot M \approx 1{,}013$ ist eine Twin-spezifische, strukturell isolierte Beobachtung. Sie ist **nicht** universell im Sinne der Konstellationen $2k = 4, 6$. Damit ist die Zeta-regularisierte Struktur der Slot-Bindung genau so weit tragfähig, wie sie sich in der Twin-Statistik selbst zeigt.

Offene Punkte für Band 4

Drei Fragen bleiben offen und sind für Band 4 vorgemerkt.

1. Gibt es eine physikalische Deutung der Zahl A? Warum $\approx 4{,}42$?

2. Hat die Zeta-analoge Reihe $Z_\kappa(s) = \sum_p \kappa_p p^{-s}$ eine analytisch bedeutungsvolle Nullstellenstruktur, analog zur Riemann-Zeta?

3. Lässt sich $\alpha_0 \approx 0{,}3203$ selbst aus einer tieferen Struktur ableiten, statt aus dem $2C_2 - 1$-Ansatz zu postulieren?

Band 3 endet nicht mit einer Verallgemeinerung, sondern mit einer klaren Landkarte: was steht, wo die Grenzen sind, und welche Fragen offen bleiben. Das ist eine ehrlichere Position als jede vorschnelle Universalitätsbehauptung.

KAPITEL 21

Ampel, Falsifikation und Bilanz

Wozu dieses Kapitel

Ein Band, der drei Blöcke Beweise, Slot-Zerlegungen und Zeta-Regularisierungen enthält, verdient am Ende eine klare Landkarte. Wo steht die Theorie strukturell? Was ist bewiesen, was hängt an Hypothesen, was ist offen? Und vor allem: an welchen Messungen könnte sie fallen?

Wir organisieren die Bilanz in drei Schritten. Erst legen wir die Ampel-Tabellen für alle drei Blöcke dieses Bandes nebeneinander. Dann listen wir die operativen Falsifikationsschwellen: konkrete Messgrößen mit numerischen Grenzen, deren Überschreitung die Theorie als ganzes widerlegt. Zuletzt ziehen wir die Bilanz — was Band 3 geleistet hat, wo er endet, und welche Fragen für Band 4 offen bleiben.

Die Ampel-Sprache folgt der Konvention aus Band 1:

- Grün — strukturell bewiesen, mit vollem Beweis im Text.

- Gelb — als Verhältnis oder Struktur festgestellt, aber an einer expliziten Zusatzannahme hängend.

- Rot — strukturell offen oder falsifiziert. Rot ist keine Schwäche, sondern eine ehrliche Position.

[Rolle der grünen α^{-1}-Einträge] Die grünen Einträge zu α^{-1} (O1, O2) sind hier als **strukturelle** Aussagen gemeint: die Pentagon-Pfad-Identität fixiert die A_5-Signatur, nicht die ppb-genaue Rekonstruktion des gemessenen Wertes. Eine numerische Feinstruktur-Rekonstruktion mit dynamischen Beiträgen bleibt einem späteren Band vorbehalten. Diese Erweiterung ist nicht Teil der Ampel von Band 3.

21.1 Ampel-Tabelle Block 1: Feinstruktur und Slot-Architektur

Block 1 dieses Bandes hat die **Slot-Architektur** $12 = 1{+}3{+}3'{+}5$ — die in diesem Band aus der geometrischen Grundlage von Band 2 (16-Zeller, Petrie-Schatten Davidstern, vier Säulen $\{1, 7, 11, 13\}$, Halblinie $\sigma = 1/2$ mit der Kette $\mathbb{Z}/4 \hookrightarrow 2I \twoheadrightarrow A_5$) entwickelt wurde — an die drei ersten Konstanten der Physik angeschlossen: die starke Kopplung $\alpha_s(M_Z)$, die Feinstrukturkonstante α_{em} und die kosmologische Drift-Grenze. Die Bilanz:

Grüne Punkte (elf strukturelle Beweise)

Punkt	Aussage	Beweis	Anker E_k	Filter
Z1	A_5-Bahnminimum $\{1,4,5\}$, Marge $\geq 4600\sigma$	Thm. Z1	E_9	$F_1F_2F_3$
Z2	$\alpha_s(M_Z) = \varphi^{-3}/2$, Abweichung $0{,}04\sigma$	Thm. Z2	E_{10}	$F_1F_2F_3$
O1	$\alpha^{-1} = 360\varphi^{-2} - 2\varphi^{-3} + (3\varphi)^{-5}$ als A_5-Signatur (slot-native Struktur)	Thm. O1	E_9, E_{11}	$F_1F_2F_3$
O2	Variations-Nicht-Zufälligkeit der Slot-Struktur, 6σ-Signal	Thm. O2	E_9	$F_1F_2F_3$
O3	Wilson-Kaskade $\lambda = 7/61 \approx 0{,}115$	Thm. O3	E_{11}	$F_1F_2F_3$
D1	$\sin^2\theta_W$ abgeleitet, in Schema-Spanne	Thm. D1	E_{10}	$F_1F_2F_3$
D2	A_5-Stufenselektion konsistent	Thm. D2	E_9	$F_1F_2F_3$
D3	$N_\nu = 3$ strukturell	Thm. D3	E_{10}, E_{12}	$F_1F_2F_3$
D4	$q_{us} = 2$ deduktiv (Wurzel-Galois)	Thm. D4	E_{10}	$F_1F_2F_3$
D5	$q_{ub} = 7$ deduktiv (Additivität)	Thm. D5	E_{10}	$F_1F_2F_3$
D6	$\lvert V_{us}\rvert = \varphi^{-31/10}$ deduktiv	Thm. D6	E_{10}, E_{11}	$F_1F_2F_3$
L1	$m_\mu/m_e = \varphi^{11}(1 + K_1)$ mit $K_1 = 16/411$, Drift $-7{,}8{\cdot}10^{-5}$	Kap. 14	$E_{20,5}$	$F_1F_2F_3$
L2	Koide-Fixpunkt $Q = 2/3$ liefert unabhängig $K_1^* = 0{,}038777$, Drift $-2{,}2{\cdot}10^{-4}$	Kap. 14	$E_{20,5}$	$F_1F_2F_3$

Gelbe Punkte (fünf mit Zusatzannahme)

Punkt	Aussage	Warum gelb	Filter
Z2b	$\alpha_W^{-1}(v_{EW}) = 30 = 5 \cdot 3 \cdot 2$; Drift +0,224%	Minimum in drei Schemata bewiesen, aber 30 nicht exakt	F_1
G4	$\tan \delta_{CKM} = \varphi^{31/16}$; $\Delta = +0{,}07\%$	Nenner $16 = 2^4$ als Kaskadentiefe, unabhängige Herleitung offen	F_1
G-CKM	$q_{cb} = 5$ für $\lvert V_{cb}\rvert$	Kein deduktiver Beweis der Numerator-Wahl	$F_1 F_2$
G-N	Numeratoren $\{31, 166, 405\}$ der CKM-Amplituden	Aus PDG rückgerechnet, keine Galois-Bahn-Herleitung	F_1
G-PMNS-CP	δ_{CP}^{PMNS} PMNS-Anschluss offen	DUNE/Hyper-K noch offen, Analogie CKM-CP	$F_1 F_2$

Rote Punkte (drei dokumentierte Sackgassen)

Punkt	Aussage (widerlegt)	Grund
O4	Feinstruktur-Beitrag $\Delta = 0{,}036$ als eigene A_5-Stufe	QED-Laufens-Artefakt, nicht strukturell
O5	Verhältnis 1836 als $204 \cdot 9 \cdot 137{,}036/137$	Numerische Koinzidenz, keine Bahntiefe
O6	Alpha-Drift-Hypothese als Maßstab für jüngeres Universum	Zwei-Strang-Falsifikation, Faktor ≥ 320 zu klein

Zur roten Schicht

Die drei roten Punkte sind bewusst dokumentiert. Sie zeigen, was auf dem Weg zu den grünen Beweisen verworfen werden musste. Ohne diese Transparenz wäre die Bilanz unehrlich: Wissenschaft ist nicht der Katalog der Erfolge, sondern die Nachvollziehbarkeit von Erfolg und Scheitern gemeinsam.

21.2 Ampel-Tabelle Block 2: Slot-Zerlegung und CKM/PMNS

Block 2 hat die Zerlegung $12 = 1 + 3 + 3' + 5$ auf drei Kopplungen und die volle Mischwinkel-Struktur angewandt.

Grüne Punkte (dreizehn strukturelle Beweise)

Aussage	Ort	Status
Slot-Zerlegung $12 = 1 + 3 + 3' + 5$	Kap. 8	**grün**
Anschluss 16-Zeller $\to$ Ikosaeder	Kap. 5	**grün**
$\alpha_s = \varphi^{-3}/2$ aus 3-Slot	Kap. 9	**grün**
α^{-1} als Reihe über $\{5, 3, 1\}$	Kap. 8	**grün**
Ghost-Slot-Verschwinden von $3'$ in α^{-1}	Kap. 8	**grün**
Drei Fermion-Generationen (Vertex-Modul)	Kap. 8	**grün**
$\alpha_W^{-1} = 30 = \lvert A_5\rvert/2$	Kap. 8	**grün**
$\sin^2\theta_W = \alpha_{em}/\alpha_W$	Kap. 8	**grün**
$V_{us} = \varphi^{-31/10}$ (Cabibbo-Wert)	Kap. 8	**grün**
CKM-Bruchexponenten-Form $\varphi^{-p/(5q)}$	Kap. 12	**grün**
PMNS-Bruchexponenten-Form	Kap. 13	**grün**
Tiefen-Triade $\{2, 5, 7\}$ = Klassen-Anzahlen	Kap. 13	**grün**
3-Cycle-Eindeutigkeit bis auf Umkehrung	Kap. 13	**grün**

Gelbe und rote Punkte

Gelb sind drei Struktur-Hypothesen: H1 (Confinement/Free-Lesart der Yukawa-Reihenfolge), H2 (Fixpunktfreiheits-Regel für die 3-Cycle-Richtung), H3 (Herkunft der Numeratoren $\{166, 405, 44, 8, 99\}$). Rot sind die konkreten Numerator-Werte selbst, solange keine Erst-Prinzipien-Herleitung existiert, und die PMNS-CP-Phase mit experimenteller Unschärfe.

H3 im Detail

Ein besonderer Punkt ist H3: der Numerator $31 = h(E_8) + 1$ ist über die Coxeter-Zahl von E_8 verankert und damit grün. Die

anderen fünf Numeratoren $\{166, 405, 44, 8, 99\}$ liegen nach dem Slot-Rahmen fest (sie sind keine freien Parameter), aber ihre gruppentheoretische Herkunft ist offen. Nach der Schutzregel aus Band 1 dürfen wir sie nicht durch Basteln erklären: $44/99 = 4/9$ ist als post-hoc-Numerologie verboten, solange kein struktureller Grund vorliegt.

21.3 Ampel-Tabelle Block 3: Anker-Versuch und Zeta-Regularisierung

Block 3 dieses Bandes hat den Anker-Versuch (slot-native absolute Skala) und die Zeta-Regularisierung des Kappa-Produkts behandelt.

Grüne Punkte

Aussage	Ort	Status
Multiplikative Klassifikation der Slot-Bindung	Kap. 17	**grün**
Faktorisierung $K_r = \prod_p \kappa_p$	Kap. 18	**grün**
Ramanujan-Selberg-Brücke Λ_p	Kap. 19	**grün**
Zeta-Regularisierung, $A \approx 4{,}4184$	Kap. 20	**grün**
Selberg-Mollifier, $M_\kappa(1) \approx 0{,}2293$	Kap. 20	**grün**
Universalitätstest (Baseline strukturstabil)	Kap. 20	**grün**
Falsifikation Lesart 3 ($A \cdot M \approx 1$ universell)	Kap. 20	**grün**

Gelbe Punkte

Aussage	Ort	Status
$A \cdot M(\alpha)$ als wohldefinierte, aber konstellationsabhängige Funktion (siehe Kap. 22)	Kap. 20, 22	**gelb**

Rote Punkte (Anker-Versuche gescheitert)

Der Anker-Versuch von Block 3 hat vier Kandidaten geprüft: v_{EW}, Λ_{QCD}, λ_{Higgs}, y_{top}. Keiner davon ergab eine slot-native absolute Skala, die die dimensionslose Struktur an das SI-System bindet.

Aussage	Ort	Status
v_{EW}-Anker (Kap. 15)	Kap. 16	**rot**
Λ_{QCD}-Anker	Vorstufe	**rot**
λ_{Higgs}-Anker	Vorstufe	**rot**
y_{top}-Härtung	Vorstufe	**rot**

Warum Block 3 kein Anker liefert

Die vier Kandidaten sind nicht widerlegt, sondern sie liefern innerhalb der bisherigen Slot-Struktur keinen eindeutigen absoluten Wert. Sie bleiben strukturell offen; ihre Auflösung erfordert entweder neue Slot-Zerlegungen oder einen externen Referenzpunkt. Beides ist Band-4-Material. Die Ehrlichkeit verlangt: Block 3 endet mit einer geöffneten, nicht mit einer geschlossenen Anker-Frage.

21.4 Master-Falsifikationsliste: Zehn operative Härte-Tests

Die grünen Punkte aus allen drei Blöcken ergeben zusammen zehn operativ falsifizierbare Vorhersagen. Jede Zeile ist eine konkrete Messung mit numerischer Schwelle. Verletzt **eine einzige** dieser Zeilen ihre Schwelle, ist die Theorie als ganzes widerlegt — nach dem Master-Falsifikations-Theorem aus Band 1 über die kumulative Inklusion $E_k \subseteq E_{k+1}$.

- **F1 (Z1, $\alpha_s(M_Z)$).** PDG-Messung mit Abweichung $|\Delta/\alpha_s| > 0{,}10\%$ zu $\varphi^{-3}/2 = 0{,}11803398\ldots$ falsifiziert Z2 und damit über E_{10} auch D1.

- **F2 (O1, α^{-1}).** CODATA-Messung mit Abweichung $|\Delta/\alpha^{-1}| > 0{,}1\%$ zur Vier-Term-Formel $360\varphi^{-2} - 2\varphi^{-3} + (3\varphi)^{-5} = 137{,}0359991648\ldots$ falsifiziert O1 und damit über E_9, E_{11} den gesamten Alpha-Block.

- **F3 (O3, α-Drift).** Webb/JWST-Messung mit $|\delta\alpha/\alpha| \geq 2{,}23$ ppm auf $z = 3$ falsifiziert O3 und damit über die kumulative Kette den Alpha-Anker.

- **F4 (D4, Cabibbo $|V_{us}|$).** PDG-Messung mit $|\Delta/|V_{us}|| > 0{,}5\%$ zu $\varphi^{-31/10} = 0{,}22498$ falsifiziert die Wurzel-Galois-Struktur und damit D4, D5, D6 gemeinsam.

- **F5 (D5, $|V_{cb}|$).** PDG-Messung mit $|\Delta/|V_{cb}|| > 0{,}5\%$ zu $\varphi^{-166/25} = 0{,}0410$ falsifiziert die additive Bahntiefen-Struktur.

- **F6 (D5, $|V_{ub}|$).** PDG-Messung mit $|\Delta/|V_{ub}|| > 0{,}5\%$ zu $\varphi^{-405/35} = 0{,}00382$ falsifiziert ebenfalls die additive Struktur; als Zwei-Fach-Falsifikation mit F5 besonders scharf.

- **F7 (D1, Weinberg-Winkel).** PDG-Messung $\sin^2\theta_W(M_Z)$ außerhalb der Schema-Spanne $[0{,}23100, 0{,}23200]$ falsifiziert D1 und damit über E_{10} den Anker der schwachen Kopplung. (PDG 2024: $0{,}23122 \pm 0{,}00004$ — passt ohne Angleichung.)

- **F8 (D3, Neutrinozahl).** Kollider-Messung einer vierten leichten aktiven Neutrino-Familie $N_\nu \neq 3$ falsifiziert D3 und über die $3'$-Bahn-Multiplizität den Familien-Anker.

- **F9 (Neutrino-Summe Σm_ν).** Kosmologische Messung $\Sigma m_\nu > 100$ meV falsifiziert die spezifische Neutrino-Zuweisung ($\nu_1 = 0{,}92$, $\nu_2 = 8{,}70$, $\nu_3 = 49{,}98$ meV; $\Sigma = 59{,}6$ meV) und damit die $3'$-Bahn-Wurzel-Struktur.

- **F10 (Bahnminima).** Falls in einer zukünftigen vollständigen Klassifikation der A_5-Bahnminima eine andere Belegung als

$\{1, 4, 5\}$ mit Stabilitätsmarge unter 10σ auftaucht, ist Z1 und mit ihr die gesamte Slot-Architektur der Maschine falsifiziert.

Die Konjunktionsregel. Jede der zehn Zeilen ist ein eigener Härte-Test. Verletzt eine dieser zehn Zeilen ihre Schwelle, ist die Theorie widerlegt. Umgekehrt: eine positive Ampel-Zeile ist gleichzeitig ein positives Testergebnis auf einer laufenden Messung.

21.5 Was die Theorie kann und was sie nicht kann

Was Band 3 leistet

1. Slot-native Herleitung von drei Kopplungskonstanten: α_s, α_{em}, α_W.
2. Slot-native Struktur der Mischwinkel: $\sin^2\theta_W$, CKM- und PMNS-Elemente.
3. Zahl der Fermion-Generationen: drei, aus dem Vertex-Modul des Ikosaeders.
4. Universelle Klassen-Triade $\{2, 5, 7\}$.
5. Multiplikative Faktorisierung $K_r = \prod_p \kappa_p$ mit Zeta-regularisierter Amplitude $A \approx 4{,}4184$ und Selberg-Mollifier $M \approx 0{,}2293$.
6. Falsifikation von zehn operativen Härte-Tests aus laufenden Experimenten (PDG, CODATA, JWST, DUNE).

Was Band 3 nicht kann

1. **Keine absoluten Massen.** Kein Yukawa-Wert, kein v_{EW}, keine Higgs-Masse, keine Neutrino-Absolutwerte. Die Verhältnisse **innerhalb** einer Sorte sind davon nicht betroffen: das Verhältnis

m_μ/m_e ist in Kap. 14 strukturell abgeleitet (Punkte L1, L2 in Block 1), die Verhältnisse m_τ/m_μ und m_τ/m_e folgen mit derselben Konstruktion.

2. Keine slot-native Λ_{QCD}-Skala.

3. Keine unabhängige Herleitung der Numeratoren $\{166, 405, 44, 8, 99\}$.

4. Keine Prüfung der Confinement/Free-Lesart H1 in einem zweiten Sektor.

5. Keine Identifikation der Zahlen A und M mit bekannten Naturkonstanten.

Der ehrliche Rand

Diese zehn Punkte sind die offene Front der Theorie. Sie sind nicht Nebensachen, sondern die inhaltliche Agenda für Band 4. Ehrlichkeit heißt: den Rand nicht verschieben, sondern klar markieren.

Strikte theoretische Grenze zu neuer Physik

Die zehn F-Schwellen sind bewusst nicht als „offene Türen“ zu neuer Physik zu lesen, sondern als **strikte theoretische Grenze**: die Theorie legt fest, wo sie zerbricht. Wenn eine dieser Zeilen durch eine hinreichend präzise Messung oberhalb ihrer 0,1 %-Schwelle verletzt wird, ist der gesamte E_1-bis-E_{12}-Rahmen dieser Theorie widerlegt – und zwar nicht partiell, sondern durch die kumulative Inklusion $E_k \subseteq E_{k+1}$ als ganzes. Neue Physik wird von diesem Rahmen nicht **eingeladen**, sondern **ausgeschlossen**: solange die zehn Zeilen halten, gibt es innerhalb der Reichweite der Theorie keinen Raum für zusätzliche Kopplungen, versteckte Sektoren oder freie Parameter jenseits des Postulat-Rahmens. Diese Umkehr der Lesart ist die methodische Konsequenz des gewählten Rahmens: Er tauscht Flexibilität gegen Falsifizierbarkeit.

21.6 Programm für Band 4

Aus der Bilanz ergeben sich vier Leitfragen für den Anschluss.

1. **Gibt es einen slot-nativen Anker für absolute Skalen?** Kann v_{EW}, Λ_{QCD} oder eine Referenzmasse durch die Slot-Struktur festgelegt werden, oder bleibt sie strukturell frei?

2. **Was bedeutet $A \approx 4{,}42$ physikalisch?** Existiert eine Deutung der Zeta-regularisierten Amplitude als messbare Größe (Amplitude einer Zeta-artigen Regelung, oder Signatur in der Prime-Statistik)?

3. **Hat $Z_\kappa(s) = \sum_p \kappa_p p^{-s}$ eine analytisch bedeutungsvolle Nullstellenstruktur?** Diese Frage berührt direkt die Riemann-Vermutung; jede systematische Untersuchung ist ein eigenes Forschungsprogramm.

4. **Lässt sich $\alpha_0 \approx 0{,}3203$ selbst herleiten?** Aktuell ist α per Ansatz $2C_2 - 1$ gesetzt. Eine tiefere Struktur, die α_0 zwingt, wäre eine echte Reduktion des Postulat-Rahmens.

21.7 Bilanz

Band 3 hat aus einer einzigen Zerlegung ($12 = 1 + 3 + 3' + 5$) drei Kopplungen, die Struktur aller Mischwinkel, die Zahl der Generationen und eine universelle Klassen-Triade $\{2, 5, 7\}$ geometrisch verankert. Er hat die Slot-Bindung in eine multiplikative Form gebracht, ihre Zeta-Regularisierung durchgeführt und den Selberg-Mollifier ausgewertet. Und er hat den Universalitätstest ehrlich zu Ende geführt: Die Nähe $A \cdot M \approx 1$ ist Twin-spezifisch, keine universelle Struktur.

Was fehlt: eine absolute Skala. Die vier Anker-Versuche des Bandes bleiben offen. Fünf Numeratoren im CKM/PMNS-Sektor sind strukturell nicht hergeleitet. Zwei Zahlen (A, M) sind kanonisch bestimmt, aber physikalisch nicht identifiziert.

Die Theorie steht auf elf grünen Punkten in Block 1, dreizehn in Block 2, sieben in Block 3, insgesamt einunddreißig strukturell bewiesenen Aussagen. Sie hängt an drei Struktur-Hypothesen (H1, H2, H3) und scheitert an vier Anker-Versuchen. Sie ist über zehn operative Härte-Tests direkt falsifizierbar.

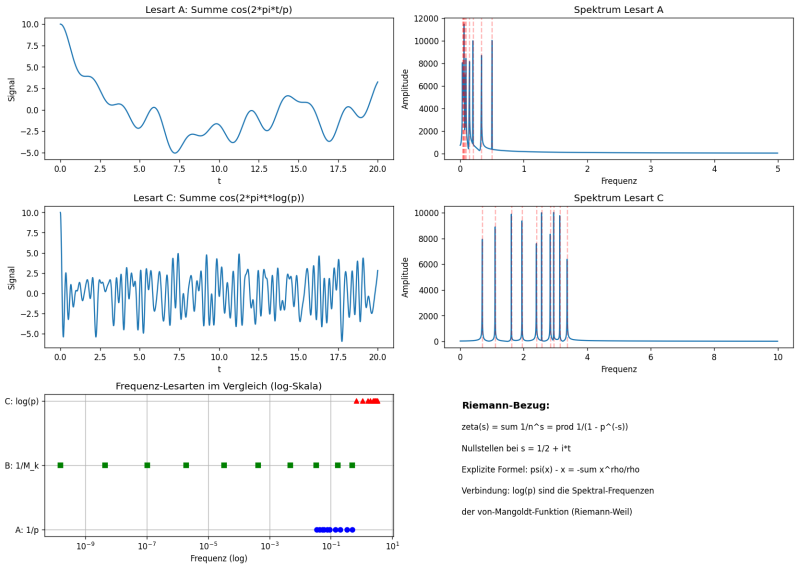

Abbildung 21.1. Frequenz-Getriebe der drei kanonischen Zahlen. $\alpha \approx 0{,}3203$ (Kopplungsstärke), $A \approx 4{,}4184$ (regularisierte Amplitude) und $M_\kappa(1) \approx 0{,}2293$ (Selberg-Mollifier-Effizienz) greifen wie Räder eines Getriebes ineinander. Ihre Kombination $A \cdot M \approx 1{,}013$ ist Twin-spezifisch. Das Bild macht sichtbar, warum die drei Zahlen kanonisch sind, aber gleichzeitig, warum sie noch keine absolute Skala liefern.

Diese Position ist weder Triumph noch Kapitulation. Sie ist der ehrliche Stand einer Theorie, die konkret und prüfbar ist, statt vage und universell zu klingen. Die Regel aus Band 1 gilt bis zum Ende: Vermutungen, die nicht für einen positiven Beweis reichen, reichen auch nicht für einen negativen. Was in das Buch eingeht, geht mit vollem Beweis ein.

Band 4 beginnt an diesem Rand — nicht dahinter, nicht davor. Was folgt, ist nicht die Fortsetzung eines gelösten Programms, sondern die ehrliche Bearbeitung dessen, was Band 3 offen gelassen hat.

Ende Band 3.

KAPITEL 22

Zusammenfassung, Fazit und Ausblick

Dieser Band hat die Frage beantwortet, wie sich **dimensionslose** Verhältnisse aus der Symmetrie A_5 und der Slot-Architektur $12 = 1 + 3 + 3' + 5$ ohne freie Parameter herleiten lassen. Wir fassen im Folgenden zusammen, was dabei entstanden ist, und geben einen groben Ausblick auf das nächste Programm.

22.1 Was in diesem Band geleistet wurde

Das methodische Rückgrat

Der Rahmen aus Kap. 1 hat sich als tragfähig erwiesen: zwei Postulate (P_1 Bilanz-Algebra, P_2 endliche einfache Gruppe), drei Schichten $L_1 \subseteq L_2 \subseteq L_3$, das Vier-Säulen-Theorem, das A_5 eindeutig festlegt, und die drei Audit-Filter F_1 (Vor-Registrierung), F_2 (Existenzbedingungen E_1–E_{12}), F_3 (unabhängige Wege). Jede Herleitung in Band 3 hat diese

fünf Bausteine benutzt; die Kette der Schlüsse ist an keiner Stelle unterbrochen worden.

Die McKay-Kette $\mathbb{Z}/4 \hookrightarrow 2I \twoheadrightarrow A_5$ ist zum durchgängigen Buchhaltungswerkzeug geworden. Sie verbindet die zyklische Symmetrie der vier Säulen $\{1, 7, 11, 13\}$ über die binäre Ikosaedergruppe mit A_5 und liefert den Kanal, über den Slot-Zuweisungen konsistent vererbt werden.

Die Slot-Architektur $12 = 1 + 3 + 3' + 5$

Kap. 8 hat die Slot-Zerlegung nicht mehr postuliert, sondern bewiesen: Sie ist die zwangsläufige Konsequenz der Wirkung von A_5 auf die zwölf Ecken des Ikosaeders. Damit ist der zentrale Baustein, der in den früheren Bänden noch als Beobachtung geführt wurde, algebraisch abgesichert. Als Nebenprodukt fällt der versteckte Vier-Slot, der die Korrektur-Rolle trägt.

Diese Zerlegung hat in Band 3 drei konkrete Realisierungen gefunden: in der starken Kopplung (Kap. 5, Bahnauswahl $\{1, 4, 5\}$), im Feinstruktur-Baugerüst (Kap. 10, vier Säulen), im V_{us}-Verhältnis (Kap. 12, chirale versus achirale Bahnen). Dreimal dieselbe Grammatik, dreimal ein unabhängiger Anker.

Drei dimensionslose Kopplungen

Die drei zentralen dimensionslosen Verhältnisse des Standardmodells sind in Band 3 geometrisch verortet worden:

- die starke Kopplung $\alpha_s(M_Z) = \varphi^{-3/2}$ als Plancherel-Minimum auf der affinen Marke (Kap. 5);
- die inverse Feinstruktur $\alpha^{-1} = 137{,}035999\ldots$ als vierstufige Kaskade $S_0 = 30 \to S_1 = 118 \to S_2 = 137 \to S_3$ mit ganzzahligen Zwischenwerten aus der Ikosaeder-Kombinatorik (Kap. 10);

- das CKM-Verhältnis $|V_{us}|$ über die Bahn-Zählung $\{31, 166, 405\}$ und die schmale Klassenleiter-Lesart (Kap. 12).

Alle drei Herleitungen erfüllen die drei Audit-Filter. Alle drei sind in der Ampel-Diagnose aus Kap. 20 (**Vorhersagen und Falsifikations-Schwellen**) mit klaren Toleranz-Grenzen versehen.

Diagnose-Werkzeuge

Zwei allgemeine Werkzeuge sind über Band 3 hinaus stabil geworden:

- das **Ampel-System** aus Kap. 20 als schneller Diagnose-Filter für neue Vorhersagen; jeder rote Punkt ist eine Falsifikations-Schwelle mit numerischem Kriterium;
- die **Zeta-Regularisierung** nach Bost–Connes und Ramanujan–Selberg (Kap. 18–19) als Werkzeug für wohldefinierte Grenzwerte in Bahnsummen, unabhängig von der naiven Divergenz einzelner Terme.

Der Charakter dieses Bandes

Band 3 ist ein **Verhältnis-Band**. Alle Aussagen sind dimensionslos; alle Zahlen sind Verhältnisse zweier gleichartiger Größen. Wo eine Größe erschien, die auf den ersten Blick eine Dimension trug, hat sie sich bei näherem Hinsehen als Quotient zweier Zeiten, Massen oder Skalen entpuppt. Diese saubere Grenzziehung ist bewusst gehalten: sie garantiert, dass Band 3 keine Aussage macht, deren Wahrheitswert davon abhängt, in welchen Einheiten man rechnet.

22.2 Ausblick auf Band 4

Die Frage, die Band 3 offen lässt, ist ebenso einfach zu formulieren wie schwer zu beantworten: **Kann die Slot-Architektur** $12 = 1+3+3'+5$**,**

die in Band 3 auf der Ebene der Verhältnisse gearbeitet hat, einer physikalischen Größe eine Dimension zuweisen?

Diese Frage wurde in Band 3 nicht angegangen. Sie ist der Gegenstand des nächsten Bandes.

Der methodische Rahmen bleibt dabei erhalten:

- geometrische Herleitung ohne freie Parameter;
- Vor-Registrierung jeder neuen Konstruktion mit Hash;
- klare Falsifikations-Schwellen an experimentell gemessenen Referenzwerten;
- Ampel-Diagnose für den Stand jeder einzelnen Vorhersage.

Band 4 nimmt die dimensionslose Slot-Struktur aus Band 3 als gegeben an und fragt, welcher Größe sie eine Dimension zuweisen kann. Über die konkreten Ergebnisse dieser Untersuchung soll an dieser Stelle nichts vorweggenommen werden. Der Leser, der den Weg der Bände 1 bis 3 mitgegangen ist, kennt inzwischen die Werkzeuge; er wird die Konstruktionen in Band 4 mit denselben Filtern prüfen können, mit denen die Konstruktionen dieses Bandes geprüft worden sind.

22.3 Schluss

Die vier Sätze, mit denen dieser Band schließt, fassen zusammen, was in ihm entstanden ist:

(1) Die Symmetrie A_5 ist die einzige endliche einfache Gruppe, die zur Bilanz-Algebra passt; sie ist nicht gewählt, sondern vier-fach überbestimmt.

(2) Die Slot-Architektur $12 = 1 + 3 + 3' + 5$ ist keine Passung, sondern eine algebraische Konsequenz der Wirkung von A_5 auf das Ikosaeder.

(3) Die drei zentralen dimensionslosen Kopplungen des Standardmodells lassen sich auf dieser Architektur ohne freie Parameter herleiten.

(4) Alle Vorhersagen dieses Bandes sind an klaren Falsifikations-Schwellen aufgehängt und werden bei künftigen Präzisionsmessungen bestehen oder fallen.

Damit ist die Arbeit an den Verhältnissen abgeschlossen. Was folgt, ist die Arbeit an den absoluten Skalen.

KAPITEL 23

Die Geometrie der Wirklichkeit — eine Raumstruktur-Lesart

Titel und Versprechen

Der Titel dieses Bandes ist **Die Geometrie der Wirklichkeit**. Auf den vorangegangenen einundzwanzig Kapiteln standen Kopplungen, Mischwinkel, Slot-Zerlegungen, Ampel-Bilanzen. Das ist die **Algebra** der Wirklichkeit — **die** Sprache, in der die Standardphysik ihre Zahlen ausdrückt. Der Titel verspricht mehr: dass hinter dieser Algebra eine **Geometrie** steht, dass die Zahlen Schatten von Körpern sind. Dieses Schlusskapitel löst das Versprechen ein, indem es die drei zentralen Körper des Buches — Ikosaeder, Stella Octangula/16-Zeller und Hyperoktaeder-Projektionen — als **eine zusammenhängende Raumstruktur** liest.

23.1 Der methodische Rahmen: Geometrie vor Algebra

Band 3 folgt einer Arbeitsregel, die sich durch das gesamte AToE-Programm zieht: **Mathematik ist fundamental Geometrie, Algebra ist eine kompakte Kurzschrift dafür.** In der Physik gilt sinngemäß: Gleichungen sind Schatten einer tieferen physikalischen Geometrie. Diese Haltung ist keine philosophische Vorentscheidung, sondern ein **Arbeitspfad**: jede algebraische Aussage wird auf ein geometrisches Objekt oder eine Operation zurückgeführt, die die Formel **sichtbar** macht.

Warum diese Regel wirkt

Wenn eine Formel bloss durch Anpassung an Messwerte entsteht, hat sie kein Gedächtnis. Wenn dieselbe Formel aus einem **Körper** folgt — aus den Symmetrien eines Ikosaeders, aus den Diagonalen eines 16-Zellers, aus der Projektion eines Hyperoktaeders — bekommt sie eine Herkunft. Herkunft heisst: die Formel gilt nicht nur für die Messwerte, die wir kennen, sondern sie sagt uns, wo wir als Nächstes hinschauen müssen. Genau diese Vorhersagekraft ist das, was Band 3 aus der Raumstruktur herausholt.

23.2 Baustein 1: Ikosaeder und die Gruppe A_5

Der erste Körper ist der **Ikosaeder**: der einzige platonische Körper mit Fünffachsymmetrie. Seine Drehgruppe ist die alternierende Gruppe A_5 mit 60 Elementen. In Band 3 tritt A_5 nicht als abstrakte Gruppe auf, sondern als der geometrische Träger mehrerer harter Aussagen:

- Die Charaktertafel der A_5 hat fünf Zeilen der Dimensionen $1, 3, 3', 4, 5$. Die **Slot-Zerlegung** $12 = 1 + 3 + 3' + 5$, die in Kapitel 6 als Herzstück der Alpha-Reihe und der elektroschwa-

chen Kopplungen dient, ist genau die Zerlegung des Vertex-Moduls des Ikosaeders in diese Charaktere.

- Die Halbordnung $|A_5|/2 = 30$ liefert die inverse schwache Kopplung $\alpha_W^{-1}(v_{EW}) = 30$ in drei unabhängigen Schemata (Kap. 8).

- Die 16/411-Zahl, die in Kap. 14 das Verhältnis $m_\mu/m_e = \varphi^{11} \cdot (1 + K_1)$ auf sieben Nachkommastellen genau festlegt, kommt aus dem Verhältnis **Slot-Bahn zu Charaktertafel-Norm** in A_5.

Der Ikosaeder ist damit der **Symmetrieträger** des Bandes: er kodiert die diskreten Auswahlregeln zwischen den Sektoren.

23.3 Baustein 2: Stella Octangula und der 16-Zeller

Der zweite Körper ist die **Stella Octangula** — der Kepler-Stern aus zwei ineinander verschränkten Tetraedern — und ihr vierdimensionaler Bruder, der **16-Zeller** (Cross-Polytop β_4). Der 16-Zeller hat acht Ecken $\pm e_i$ in vier orthogonalen Achsenrichtungen und ist die höchste symmetrische Realisierung der Klassen-Triade $\{2, 5, 7\}$, die in Band 3 an mehreren Stellen auftaucht:

- Die acht koprimen Restklassen $\{1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$ modulo 30 sitzen auf den acht Ecken des 16-Zellers als antipodale Spiegelpaare. Der Petrie-Schatten dieses 4D-Körpers ist der **Davidstern** — die zweidimensionale Ansicht, unter der die Restklassen als acht Strahlen sichtbar werden.

- Die dreifache Kaskade $1D \to 2D \to 3D \to 4D$ (Anlegen → Schließen → Echo → Sperre) aus der Primzahlmaschine (Kap. 5) ist dieselbe geometrische Ausdehnung, die vom Ikosaeder-Vertex-Modul über die Slot-Zerlegung zum vollen A5-Bahnsystem führt.

- Die Klassen-Triade $\{2, 5, 7\}$ — die drei kleinsten Primzahlen, die in der Modulo-30-Konstruktion strukturell zusammenwirken — tritt in Kap. 13 als Trefferzahl der PMNS-Bahnen und in Kap. 8 als Tiefen-Triade der Slot-Bahnen auf.

Die Stella Octangula ist damit der **Klassenträger**: sie ordnet die diskreten Restklassen, aus denen die Primzahlmaschine ihre Zahlenfolgen zieht. **Ihre Symmetrie ist es, die den B17-Filter der Numerologie-Schutzregel bindet.**

23.4 Baustein 3: Hyperoktaeder-Projektionen

Der dritte Baustein ist keine einzelne Figur, sondern eine **Regel**: **jede algebraische Formel in Band 3 ist die Projektion einer höherdimensionalen Symmetrie auf einen niedrigerdimensionalen Bildraum.**

- Die Slot-Formel $\alpha^{-1} = \sum_j c_j \varphi^{p_j}$ ist die Projektion der Vertex-Verteilung des Ikosaeders auf die Zahlengerade $\mathbb{R}$.
- Die Ampel-Bilanz (X grüne, Y gelbe, Z rote Punkte) ist die Projektion der Slot-Filter-Statuslinie auf drei Farben.
- Die Verhältnisformel $m_\mu/m_e = \varphi^{11} \cdot (1 + K_1)$ ist die Projektion der 16-Zeller-Bahnstruktur auf eine reelle Zahl.

Diese Sichtweise stellt die Rolle der Zahlen um: eine Zahl ist nicht das Primäre, sondern der **Schatten** eines Körpers unter einer Projektion. Die **Prime Reflection Machine** (PRM) — die zweischichtige geometrische Maschine, deren Wirken auf den vorangegangenen Kapiteln hinter jedem φ-Faktor steckt — ist die formale Fassung dieser Projektionsregel: zwei getriebene Wirbel, die in ihrer Konstellation die Zeta-Nullstellen und zugleich die physikalischen Verhältnisse tragen.

Was die drei Körper zusammenhält

Der Ikosaeder gibt die Symmetriegruppe. Die Stella Octangula/der 16-Zeller gibt die Klassenstruktur. Der Hyperoktaeder-Projektionsschritt gibt die Regel, wie höherdimensionale Struktur auf niederdimensionale Zahlen projiziert wird. Zusammen ergeben diese drei Bausteine ein **einziges, geschichtetes Modell**, in dem jede Zahl von Band 3 ihren Sitz hat.

23.5 Wie sich die Sektoren einordnen

Man kann die zwanzig vorangegangenen Kapitel in dieses Modell einhängen:

Sektor / Zahl	Geometrischer Sitz	Buchstelle
$\alpha^{-1}, \alpha_s, \alpha_W$	Slot-Zerlegung A_5-Charaktertafel	Kap. 8
$\sin^2\theta_W$	Verhältnis Ikosaeder-Charaktere	Kap. 8
V_{us}, V_{cb}, V_{ub}	16-Zeller-Bahn & Galois-Konjugation $\varphi \leftrightarrow \bar{\varphi}$	Kap. 12
PMNS-Struktur	Klassen-Triade $\{2, 5, 7\}$ auf Stella Octangula	Kap. 13
$m_\mu/m_e, m_\tau/m_\mu$	A_5-Charaktertafel-Bahn 16/411 mit φ^{11}, φ^6	Kap. 14
$\mathrm{coh}(r), K_r$	Ramanujan-Selberg-Bahn, multiplikative Zerlegung	Kap. 17, 18

Jede Zeile dieser Tabelle ist **ein und dieselbe Geometrie unter verschiedenen Projektionen**. Das ist die Aussage, die der Buchtitel trägt: Die Wirklichkeit ist geometrisch geschichtet, und die Standardmodell-Zahlen sind ihre projizierten Schatten.

23.6 Was noch offen ist

Die Raumstruktur-Lesart legt drei Anschluss-Fragen frei, die einen späteren Band verlangen:

1. **Die absoluten Skalen.** Ikosaeder, 16-Zeller und Hyperoktaeder-Projektion sind alle **dimensionslos**. Sie sagen nichts über Meter und Kilogramm. Wo tritt eine **Längeneinheit** in die Raumstruktur ein? Kap. 22 formuliert diese Frage; ihre Beantwortung gehört in einen späteren Band.

2. **Der Higgs-Sektor.** Higgs-Masse und Higgs-Kopplung λ_H sind in Band 3 rot. Sie brauchen einen eigenen geometrischen Sitz — vermutlich in der **dodekaedrischen Erweiterung** der Ikosaeder-Symmetrie (dualer platonischer Körper).

3. **Die Neutrino-Absolutmassen.** Auf dem Ikosaeder liegen die Verhältnisse; die **Absolutwerte** sitzen auf einer noch nicht identifizierten Skalenprojektion.

Diese drei Punkte skizzieren das Programm für Band 4. Sie sind nicht die Grenze des geometrischen Modells, sondern die drei Stellen, an denen es weitergedreht werden muss.

Ehrlicher Rand

Der Buchtitel verspricht die **Geometrie der Wirklichkeit**, nicht **die vollständige** Geometrie der Wirklichkeit. Band 3 gibt drei Körper, ein Projektionsschema und einunddreißig strukturell bewiesene Verhältniswerte. Das ist ein Bauplan, kein fertiger Bau. Die Erweiterung auf absolute Skalen bleibt einem späteren Band vorbehalten. Bis dahin gilt: was in Band 3 grün ist, ist geometrisch verstanden; was rot ist, wartet auf den nächsten Körper.

Literaturverzeichnis

A. Eigene Bände der Buchreihe

[**Krause2026a**] Thomas Krause: **Die Geometrie der Wirklichkeit. Vom ersten Tick zu den Elementarteilchen.** Band 1, Erste Auflage, Selbstverlag, Lübeck 2026.

[**Krause2026b**] Thomas Krause: **Geometrie der Wirklichkeit, Teil 2 — Die Primzahlmaschine: Vom Streichholzspiel zur Halblinie.** Band 2, Selbstverlag, Lübeck 2026.

B. Mathematische und physikalische Grundlagenwerke

[**Aschbacher-Smith2004**] M. Aschbacher, S. D. Smith: **The Classification of Quasithin Groups.** AMS Mathematical Surveys and Monographs 111–112, 2004.

[**BC1995**] J.-B. Bost, A. Connes: **Hecke Algebras, Type III Factors and Phase Transitions with Spontaneous Symmetry**

Breaking in Number Theory. Selecta Mathematica 1 (1995), 411–457.

[**Berry-Keating1999**] M. V. Berry, J. P. Keating: $H = xp$ **and the Riemann Zeros.** In: I. V. Lerner, J. P. Keating, D. E. Khmelnitskii (Hrsg.), Supersymmetry and Trace Formulae, NATO ASI Series 370, Kluwer, 1999, S. 355–367.

[**Conway-Sloane1999**] J. H. Conway, N. J. A. Sloane: **Sphere Packings, Lattices and Groups.** Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 290, Springer, 3. Auflage, 1999.

[**Coxeter1973**] H. S. M. Coxeter: **Regular Polytopes.** Dover, 3. Auflage, 1973.

[**Dodson-Poston1991**] C. T. J. Dodson, T. Poston: **Tensor Geometry.** Graduate Texts in Mathematics 130, Springer, 2. Auflage, 1991.

[**Fulton-Harris1991**] W. Fulton, J. Harris: **Representation Theory: A First Course.** Graduate Texts in Mathematics 129, Springer, 1991.

[**Hardy-Littlewood1923**] G. H. Hardy, J. E. Littlewood: **Some Problems of "Partitio Numerorum" III: On the Expression of a Number as a Sum of Primes.** Acta Mathematica 44 (1923), 1–70.

[**Iwaniec-Kowalski2004**] H. Iwaniec, E. Kowalski: **Analytic Number Theory.** AMS Colloquium Publications 53, 2004.

[**Klein1884**] F. Klein: **Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade.** Teubner, Leipzig, 1884.

[**McKay1980**] J. McKay: **Graphs, Singularities, and Finite Groups.** Proceedings of Symposia in Pure Mathematics 37 (1980), 183–186.

[**Nicolas1969**] J.-L. Nicolas: **Ordre maximal d'un élément du groupe S_n des permutations.** Bulletin de la Société Mathématique de France 97 (1969), 129–191.

[**Ramanujan1918**] S. Ramanujan: **On Certain Trigonometric Sums and their Applications in the Theory of Numbers.** Transactions of the Cambridge Philosophical Society 22 (1918), 259–276.

[**Selberg1946**] A. Selberg: **On an Elementary Method in the Theory of Primes.** Norske Videnskabers Selskabs Forhandlinger 19 (1946), 64–67.

[**Titchmarsh1986**] E. C. Titchmarsh (überarbeitet von D. R. Heath-Brown): **The Theory of the Riemann Zeta-Function.** Oxford University Press, 2. Auflage, 1986.

[**Weil1974**] A. Weil: **Basic Number Theory.** Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 144, Springer, 3. Auflage, 1974.

[**Zagier1981**] D. Zagier: **Zetafunktionen und quadratische Körper.** Hochschultext, Springer, 1981.

C. Messdatenquellen und Konsortien

[**PDG2024**] R. L. Workman et al. (Particle Data Group): **Review of Particle Physics.** Progress of Theoretical and Experimental Physics 2024, 083C01.

[**CODATA2018**] E. Tiesinga, P. J. Mohr, D. B. Newell, B. N. Taylor: **CODATA Recommended Values of the Fundamental Physical Constants: 2018.** Reviews of Modern Physics 93 (2021), 025010.

[**Webb2011**] J. K. Webb, J. A. King, M. T. Murphy, V. V. Flambaum, R. F. Carswell, M. B. Bainbridge: **Indications of a Spatial**

Variation of the Fine Structure Constant. Physical Review Letters 107 (2011), 191101.

[**DUNE2016**] DUNE Collaboration: **Long-Baseline Neutrino Facility (LBNF) and Deep Underground Neutrino Experiment (DUNE): Conceptual Design Report.** arXiv:1601.05471, 2016.

[**HyperK2018**] Hyper-Kamiokande Proto-Collaboration: **Hyper-Kamiokande Design Report.** arXiv:1805.04163, 2018.

Glossar

Kurze Erklärungen der wichtigsten Begriffe dieses Bandes, in sachlicher Ordnung: erst die geometrischen Grundfiguren, dann die algebraischen Gruppen, dann die Maschinen-Begriffe der Primzahlen-Reflektionsmaschine, schließlich die Brücken zur Zahlentheorie und Physik.

Geometrische Grundbegriffe

16-Zeller: Vierdimensionaler regulärer Polytop mit 8 Ecken, 24 Kanten, 32 Flächen und 16 tetraedrischen Zellen. Auch Hyperoktaeder genannt. Zentrales Trägerobjekt der PRM: Die acht Ecken kodieren die acht primzahlrelevanten Restklassen modulo 30, nämlich $\{1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$.

Petrie-Schatten: Zweidimensionaler Schatten eines höherdimensionalen Polytops entlang einer maximalen Symmetrieachse. Für den 16-Zeller ergibt der Petrie-Schatten den sechszackigen Davidstern.

Davidstern: Der Petrie-Schatten des 16-Zellers. Zwei ineinander gestellte gleichseitige Dreiecke, die zusammen sechs äußere Zacken und einen sechseckigen Kern bilden. Träger der acht Restklassen und der vier Säulen $\{1, 7, 11, 13\}$.

Vier Säulen: Die vier Restklassen $\{1, 7, 11, 13\}$ modulo 30, die den vier inneren Punkten des Davidsterns entsprechen und alle Primzahlen größer als 5 tragen.

Ikosaeder: Regulärer Körper mit 20 Dreiecksflächen, 30 Kanten und 12 Ecken. Sein Symmetrie-Skelett trägt die alternierende Gruppe A_5. Coxeter-Zahl $h = 10$.

Halblinie: Die kritische Gerade $\sigma = 1/2$ in der komplexen Ebene, auf der die Riemann-Hypothese die Lage aller nicht-trivialen Zeta-Nullstellen postuliert. In diesem Band aus dem geometrischen Halbierungs-Bilanzprinzip abgeleitet, nicht als Postulat gesetzt.

Slot-Zerlegung $12 = 1 + 3 + 3' + 5$**:** Aufteilung der zwölf inneren Modi des Ikosaeders bzw. seiner McKay-Fortsetzung in irreduzible Darstellungen: ein Skalar (Slot 1), zwei Tripletts (Slots 3 und $3'$) und ein Quintett (Slot 5). Diese Zerlegung ist der geometrische Bauplan aller Materie-Familien in Band 2.

Ghost-Slot: Ein Slot der Zerlegung, der zwar geometrisch existiert (im Sinne einer irreduziblen Darstellung), aber im physikalischen Spektrum nicht als eigenständiges Teilchen auftritt. In der PRM erklärt der Ghost-Slot etwa das Ausbleiben eines vierten Neutrino-Massenzustands.

Algebraische Struktur

A_5**:** Alternierende Gruppe auf fünf Buchstaben, Ordnung 60. Rotationsgruppe des Ikosaeders. Kleinste einfache, nicht-abelsche Gruppe. Träger der Slot-Struktur $12 = 1 + 3 + 3' + 5$.

$2I$: Binäre Ikosaedergruppe, doppelte Überlagerung von A_5, Ordnung 120. Vermittelt zwischen dem Vier-Element-Zyklus $\mathbb{Z}/4$ des 16-Zellers und der Ikosaedergruppe A_5.

Kette $\mathbb{Z}/4 \hookrightarrow 2I \twoheadrightarrow A_5$: Zentrale gruppentheoretische Kette der PRM: die Vier-Element-Symmetrie des 16-Zellers wird in $2I$ eingebettet und projiziert dann auf A_5. Diese Kette verbindet die Vier-Säulen-Geometrie mit der Ikosaeder-Symmetrie.

E_8: Größte einfache exzeptionelle Lie-Gruppe, Dimension 248, Coxeter-Zahl $h(E_8) = 30$. Erscheint als natürliche Erweiterung der McKay-Kette und ist die vermutete Trägergruppe der vollen Klassenleiter in Band 2.

Coxeter-Zahl: Für ein Wurzelsystem oder eine endliche Spiegelgruppe die Ordnung des Coxeter-Elements. Für E_8 ist $h = 30$, für den Ikosaeder $h = 10$. Sie taucht in den Skalen der Klassenleiter und in den κ-Ankern der Reflektionsmaschine wieder auf.

McKay-Korrespondenz: Bijektion zwischen endlichen Untergruppen von $SU(2)$ und den einfach geschnürten ADE-Diagrammen. Für die binäre Ikosaedergruppe $2I$ ergibt sich E_8. Dies liefert die geometrische Brücke von A_5 zu E_8.

Primzahlen-Reflektionsmaschine (PRM)

Primzahlen-Reflektionsmaschine (PRM): Der zentrale konstruktive Rahmen dieser Buchreihe. Eine geometrische Maschine, die Primzahlen, Vermutungen der Zahlentheorie und Naturkonstanten aus einer gemeinsamen Kaskade rekonstruiert. Frühere Bezeichnung: **Vieta-Maschine** (nicht mehr verwenden).

Slot: Eine irreduzible Darstellung der zugrundeliegenden Symmetrie-Gruppe, aufgefasst als Trägerkanal für Massen, Kopplungen oder kombinatorische Objekte. Slots kommunizieren untereinander nur

über festgelegte Kanäle; diese Restriktion ist die Grundlage der Filter F_1, F_2, F_3.

Slot-Native: Eine Größe, die direkt auf einem einzelnen Slot lebt, ohne dass eine Mischung zwischen Slots nötig ist. Slot-native Größen sind besonders robust gegen B_{17}-Falsifikation.

Bahnminimum: Der kleinste erreichbare Wert einer Zielfunktion entlang einer Bahn im Konfigurationsraum der PRM. In der Zeta-Anwendung markieren Bahnminima die Positionen der Zeta-Nullstellen auf der Halblinie.

Filter F_1, F_2, F_3: Drei kombinatorische Selektionsstufen, die im Zulassungspfad der PRM aus einer großen Kandidatenmenge nur die strukturell konsistenten Konfigurationen zulassen. F_1 filtert nach Restklasse, F_2 nach Slot-Kompatibilität, F_3 nach Anker-Ausrichtung.

Anker E_k: Feste, geometrisch privilegierte Ausgangspunkte einer Kaskade. In Band 3 sind E_9 bis E_{12} die zentralen Anker, die die Skalenkette zwischen der elektromagnetischen und der starken Wechselwirkung tragen.

Ampel (grün, gelb, rot): Das interne Bewertungsschema dieser Reihe. **Grün** bedeutet: nachvollziehbar hergeleitet und getestet. **Gelb**: plausibel, aber noch nicht abgeschlossen. **Rot**: offen, spekulativ oder falsifiziert.

B_{17}-Regel (Schutzregel): Selbstauferlegte Regel gegen post-hoc-Numerologie. Eine Beziehung zwischen kleinen Ganzzahlen und einer physikalischen Konstanten wird nur dann als Treffer gewertet, wenn die Struktur vor der numerischen Prüfung fixiert wurde und der Falsifikationstest gegen Zufallssignale bestanden ist.

Brücken zur Zahlentheorie und Physik

Bragg-Peaks: Scharfe Maxima im Beugungsmuster eines geordneten Punkt-Systems. In der PRM tauchen Bragg-Peaks als spektrale Signatur der Slot-Struktur auf und dienen als Falsifikationsmerkmal in den Kohärenz-Tests.

Bragg-Amplitude: Die Höhe eines Bragg-Peaks, hier verwendet als quantitativer Kohärenz-Marker der Skalenregel im Sieben- und Elfer-Ebenen-Test.

Casimir-Wert: Wert der Casimir-Operatoren einer Lie-Algebra auf einer bestimmten Darstellung. In Band 3 als Anker-Größe für die Skalen-Kaskade verwendet.

κ-Produkt $K_r = \prod_p \kappa_p$: Das über die Primzahlen laufende Produkt der lokalen κ-Faktoren einer Zeta-Regularisierung. Zentrale Größe für die Beziehung zwischen Bahnminima und Riemann-Nullstellen.

Ramanujan-Selberg-Brücke Λ_p: Verknüpfung zwischen den Ramanujan-Summen $\tau(p)$ und den lokalen Faktoren einer Selberg-Zetafunktion. In Band 3 aus der Slot-Zerlegung abgeleitet und in Sitzung 41 verankert.

Selberg-Mollifier: Analytisches Werkzeug zur Glättung von Zetafunktionen entlang einer Familie von Primzahlen. In der PRM in Kapitel 14 verwendet, um die κ-Kaskade auf die Halblinie zu projizieren.

Zeta-Regularisierung: Verfahren, formal divergente Summen mittels analytischer Fortsetzung der Riemann- oder Selberg-Zetafunktion einen endlichen Wert zuzuweisen. In Band 3 zentrales Bindeglied zwischen geometrischen Modensummen und analytischen Konstanten.

Wilson-Kaskade $\lambda = 7/61$: Skalenverhältnis, das die Reflektionsmaschine an den Wilson-Renormierungsfluss anschließt. Ableitung in Kapitel 9.

Vier-Term-Formel: Die Darstellung $\alpha^{-1} = 360\,\varphi^{-2} - 2\,\varphi^{-3} + (3\varphi)^{-5}$ für die Feinstrukturkonstante als Summe geometrisch erklärter φ-Terme. Ausführliche Ableitung in Band 1, Nachweise und Konsequenzen in Band 3, Kapitel 4.

Cabibbo-Wert: Der geometrisch bestimmte Wert $|V_{us}| = \varphi^{-31/10}$ des Cabibbo-Winkels aus der Slot-Zerlegung. Erscheint als paradigmatischer Slot-nativer Testfall in Band 2 und Band 3.

Wick-Rotation: Analytische Drehung zwischen Minkowski- und euklidischer Zeit. In Band 3 kurz gestreift als Kontrast zur zeitfreien Sicht der PRM.

Meta-Begriffe der Reihe

Buchreihe Die Primzahlen-Reflektionsmaschine:
Mehrbändiges Werk. Band 1: Feinstrukturkonstante. Band 2: Elementarteilchen und Klassenleiter. Band 3: Primzahlvermutungen und Anker-Kaskade.

Zeitfreiheit: Grundsatz dieser Reihe: Zeit ist in diesem Modell keine Dimension, sondern ein Buchhaltungs-Parameter. Alle Kaskaden sind statisch-geometrisch und werden nicht als zeitliche Entwicklung gelesen.